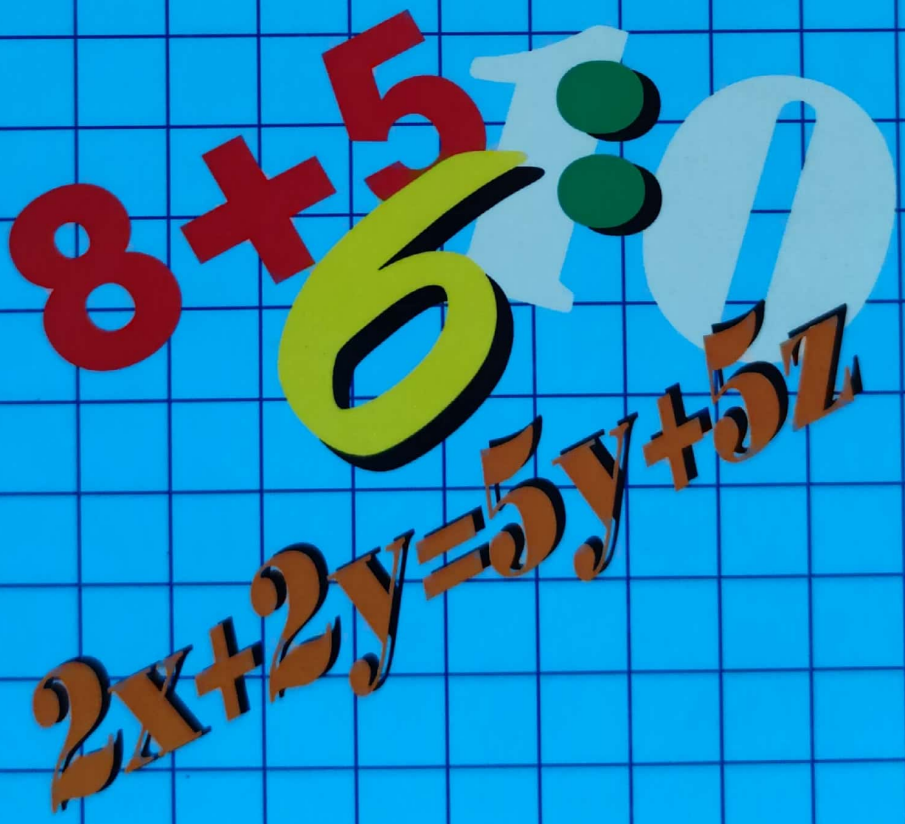
TRAIAN COHAL

PROBLEME DE MATEMATICĂ

PENTRU CLASA A VII-A



editura pim

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

ISBN 10: 973-716-378-8
ISBN 13: 978-973-716-378-3

Editura pim

Iaşi, 2006

Tipărit la Editura pim
Şoseaua Ştefan cel Mare nr. 11
700498 - Iaşi
Tel./Fax: 0232-212.740
e-mail: editurapim@pimcopy.ro
www.pimcopy.ro

TRAIAN COHAL

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CLASA A VII-A

Editura Pim
Iaşi - 2006

Scanned with OKEN Scanner

De acelaşi autor:

1. **Vă place matematica?**, Editura Moldova, Iaşi, 1991.
2. **Probleme de trigonometrie**, Editura Moldova, Iaşi, 1995.
3. **Geometria – o întreagă lume**, Editura Dosoftei, Iaşi, 1995
4. **Vă place matematica?** - ediţia a II-a, Editura Moldova, Iaşi, 1996.
5. **Geometrie – probleme rezolvate pentru gimnaziu şi liceu**, Editura Polirom, Iaşi, 1996.
6. **Probleme de aritmetică**, Editura Polirom, Iaşi, 1997.
7. **Probleme de algebră pentru liceu** (două volume), Editura Polirom, Iaşi, 1998.
8. **Probleme de matematică pentru clasa a VI-a**, Editura TipoMoldova, Iaşi 2002.
9. **Probleme de matematică pentru clasa a VIII-a,** Editura TipoMoldova, Iaşi 2004.
10. **Probleme de matematică pentru clasa a XI-a**, Editura Taida, Iaşi, 2006

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL I

NUMERE RAȚIONALE

§1. NUMERE ÎNTREGI

PROBLEME REZOLVATE

1. **Fie** $a = 1+2-3-4+5+6-7-8+\ldots+97+98-99-100$ **și** $b = -2+4-6+8-10+12-\ldots-198+200$. **Arătați că** $a+b=0$.

Soluție

Deoarece $a=(1+2-3-4)+(5+6-7-8)+\ldots+(97+98-99-100)=\underbrace{-4+(-4)+\ldots+(-4)}_{\text{25 de termeni}}=$

$=-4\cdot 25=-100$, iar $b=(-2+4)+(-6+8)+(-10+12)+\ldots+(-198+200)=$

$=\underbrace{2+2+2+\ldots+2}_{\text{50 de termeni}}=2\cdot 50=100$, rezultă că $a+b=0$.

2. **Calculați suma** $s=-1-2+3+4-5-6+7+8-\ldots$, **știind că aceasta are 99 de termeni.**

Soluție

Se arată cu ușurință că $s=-1-2+3+4-5-6+7+8-\ldots-97-98+99$. Cum $s=(-1-2+3+4)+(-5-6+7+8)+\ldots+(-97-98+99)=\underbrace{4+4+\ldots+4}_{\text{24 de termeni}}+(-96)=$

$=4\cdot 24+(-96)=96+(-96)=0$, cerința enunțului a fost îndeplinită.

3. **Fie** s **suma a zece numere întregi consecutive și** p **produsul lor. Arătați că, dacă** $p=0$, **atunci** $-45\leq s\leq 45$.

Soluție

Întrucât produsul celor zece numere este 0, unul dintre numere este 0. Ținând seama de acest rezultat, cât și de faptul că termenii sumei sunt numere întregi consecutive, deducem că cea mai mică valoare a sumei este -45 (care se obține atunci când numerele sunt : $-9, -8, -7, \ldots, -1, 0$) și că cea mai mare valoare a sumei este 45 (care se obține atunci când numerele sunt : $0, 1, 2, \ldots, 9$). Drept urmare, $-45\leq s\leq 45$.

4. **Fie** $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}$ **zece numere întregi impare consecutive crescătoare. Aflați media aritmetică a acestor numere, știind că** $x_1+x_2+x_3=-27$.

Soluție

Fie $x_1=2k+1$ ($k\in\mathbb{Z}$). Atunci, $x_2=2k+3$ și $x_3=2k+5$, iar $x_1+x_2+x_3=6k+9$. Rezultă că $6k+9=-27$, de unde $k=-6$. Prin uramare, $x_1=-11$, $x_2=-9$, $x_3=-7$, $x_4=-5$, $x_5=-3$, $x_6=-1$, $x_7=1$, $x_8=3$, $x_9=5$ și $x_{10}=7$, iar media aritmetică

Scanned with OKEN Scanner

menţionată în enunţ este $\frac{-11+(-9)+(-7)+\ \dots\ +7}{10}=\frac{-20}{10}=-2$.

5. Suma mai multor numere întregi consecutive este 2002. Aflaţi câţi termeni are suma, ştiind că numărul termenilor strict pozitivi este cu 4 mai mare decât numărul celor negativi.

Soluţie

Fie s suma considerată şi $-n$ ($n\in\mathbb{N}^*$) cel mai mic dintre termenii sumei; rezultă că aceştia sunt : $-n,\ -(n-1),\ \dots,-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \dots,n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4$. Deoarece $-n+n=0,\ -(n-1)+(n-1)=0,\ \dots,-2+2=0$ şi $-1+1=0$, rezultă că $s=n+1+n+2+n+3+n+4=4n+10$. Prin urmare, $4n+10=2002$, de unde $n=498$, ceea ce arată că numărul termenilor sumei este $2\cdot 498+1+4=1001$.

6. Suma a paisprezece numere întregi consecutive este 63. Aflaţi termenii sumei.

Soluţie

Dacă toţi termenii sumei ar fi numere naturale, atunci suma ar fi cel puţin $0+1+2+\ \dots\ +13=91$. Cum $91-63=28$, suma anterioară trebuie micşorată cu 28. Ţinând seama şi de faptul că termenii sumei sunt numere întregi consecutive, cerinţa anterioară se poate realiza înlocuind pe 13 cu -1 şi pe 12 cu -2 (fiecare înlocuire micşorează suma iniţială cu 14). Deci, numerele căutate sunt : $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \dots,11$.

7. Distribuiţi primele o sută de numere natuarle nenule în două grupe, astfel încât una dintre grupe să aibă 70 de numere, iar suma numerelor din fiecare grupă să fie aceeaşi.

Soluţie

Fie s suma numerelor din una dintre cele două grupe menţionate în enunţul problemei. Deoarece $1+2+3+\ \dots\ +100=(1+100)+(2+99)+\ \dots\ +(50+51)=$ $=\underbrace{101+101+\ \dots\ +101}_{\text{50 de termeni}}=101\cdot 50=5050$, iar suma numerelor din fiecare grupă trebuie să fie aceeaşi, rezultă că $s=5050:2=2525$. Punând în prima grupă primele 70 de numere naturale nenule, suma numerelor din această grupă este $s_1=1+2+3+\ \dots\ +70=(1+70)+(2+69)+\ \dots\ +(35+36)=71\cdot 35=2485$, iar suma numerelor celeilalte grupe este $s_2=5050-2485=2565$, ceea ce arată că s_1 este cu $2525-2485=40$ mai mică decât s, iar s_2 este cu $2565-2525=40$ mai mare decât s. Deducem că sumele anterioare (s_1 şi s_2) pot fi făcute egale, mărind s_1 cu 40 şi micşorând s_2 cu 40. Aceasta se poate realiza schimbând între ele, spre exemplu, numerele 31 şi 71. Drept urmare, cerinţa problemei poate fi îndeplinită punând în prima grupă numerele : $1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ 30,\ 32,\ 33,\ \dots,\ 70$ şi 71, iar în cea de a doua numerele : $31,\ 72,\ 73,\ \dots,\ 100$.

8. Distribuiţi numerele $-1,\ -2,\ -3,\ \dots,-40$ în două grupe, astfel încât una dintre grupe să conţină 28 de numere, iar suma numerelor din fiecare grupă să fie aceeaşi.

Soluţie

Fie s suma numerelor din una dintre cele două grupe menţionate în enunţul problemei. Întrucât
$-1+(-2)+(-3)+\ \dots\ +(-40)=[-1+(-40)]+[-2+(-39)]+\ \dots\ +[-20+(-21)]=-41\cdot 20=-820$,
rezultă că $s=-820:2=-410$. Punând în prima grupă numerele $-1,\ -2,\ -3,\ \dots,-28$, suma numerelor din această grupă este $s_1=-1+(-2)+$ $+(-3)+\ \dots\ +(-28)=-29\cdot 14=-406$, iar suma numerelor din cealaltă grupă este $s_2=-810-(-406)=-414$. Deducem că s_1 este cu $-406-(-410)=4$ mai

Scanned with OKEN Scanner

mare decât s, iar s_2 este cu 4 mai mică decât s. Rezultă că sumele obținute anterior pot fi făcute egale micșorând s_1 cu 4 și mărind s_2 cu 4. Aceasta se poate realiza schimbând între ele numerele -28 și -32. În consecință, cerința problemei poate fi îndeplinită punând în prima grupă numerele : $-1, -2, -3, \ldots, -27$ și -32, iar în cea de a doua numerele : $-28, -29, -30, -31, -33, -34, \ldots, -40$.

9. Fie n un număr natural impar. Se consideră 2003 de numere, fiecare dintre ele fiind n sau $-n$. Arătați că nu putem distribui aceste numere în două grupe astfel încât suma numerelor din fiecare grupă să fie aceeași.

Soluție

Dacă în cele 2003 de numere înlocuim peste tot pe $-n$ cu n, paritatea sumei inițiale nu se schimbă (căci orice înlocuire a lui $-n$ cu n atrage după sine o mărire a sumei inițiale cu $2n$). Astfel, toate numerele devin egale cu n, iar suma lor este $2003n$. Cum $2003n$ este număr impar, deducem că și suma inițială este număr impar. Dacă am putea distribui numerele considerate în două grupe astfel încât suma numerelor din fiecare grupă să fie aceeași (fie s această sumă), atunci suma totală ar fi $2s$ (care este număr par), ceea ce este în contradicție cu rezultatul stabilit anterior. Astfel, cerința enunțului a fost îndeplinită.

10. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, a suma numerelor naturale impare mai mici decât n și b suma numerelor naturale pare mai mici decât n. Calculați $a - b$.

Soluție

Dacă $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}^*$), atunci $a = 1+3+5+\ldots+(2k-1)$, iar $b = 2+4+6+\ldots+(2k-2)$, de unde $a-b = (1-2)+(3-4)+(5-6)+\ldots+[(2k-3)-(2k-2)]+2k-1 = \underbrace{-1+(-1)+\ldots(-1)}_{k-1 \text{ ori}}+$

$+2k-1 = -(k-1)+2k-1 = k = \frac{n}{2}$.

Dacă $n = 2k+1$ ($k \in \mathbb{N}$), atunci $a = 1+3+5+\ldots+2k-1$, iar $b = 2+4+6+\ldots+2k$, ceea ce implică $a-b = (1-2)+(3-4)+(5-6)+\ldots+[(2k-1)-2k] = \underbrace{-1+(-1)+(-1)+\ldots+(-1)}_{k \text{ ori}} =$

$= -k = -\frac{n-1}{2}$.

11. Se consideră n numere naturale nenule, distincte și oricare dintre ele mai mic decât $2n$. Arătați că printre ele există unul egal cu n sau două a căror sumă este $2n$.

R.M.T. 1-2/1982

Soluție

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numerele ce îndeplinesc condițiile impuse în enunț. Atunci, și numerele $2n-a_1, 2n-a_2, \ldots, 2n-a_n$ satisfac aceleași condiții. Numerele naturale nenule : $a_1, a_2, \ldots, a_n, 2n-a_1, 2n-a_2, \ldots, 2n-a_n$ fiind în număr de $2n$ și fiecare dintre ele mai mic decât $2n$, nu pot fi toate distincte. Drept urmare, există $i, j \in \mathbb{N}$, cu $1 \le i \le n$ și $1 \le j \le n$ astfel încât $a_i = 2n - a_j$, de unde $a_i = n$ (dacă $i = j$) sau $a_i + a_j = 2n$ (dacă $i \neq j$).

12. Aflați patru numere întregi, diferite de -1 și de 1, al căror produs să fie -210.

Soluție

Deoarece produsul celor patru numere este număr negativ, fie unul, fie trei dintre ele trebuie să fie negative. Remarcând și faptul că $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, numerele căutate sunt : $-2, 3, 5, 7$, sau $2, -3, 5, 7$, sau $2, 3, -5, 7$, sau $2, 3, 5, -7$, sau $2, -3, -5, -7$, sau $-2, 3, -5, -7$, sau $-2, -3, 5, -7$, sau $-2, -3, -5, 7$.

Scanned with OKEN Scanner

13. Se consideră câteva numere întregi consecutive. Fie a cel mai mic și b cel mai mare dintre ele, iar s suma numerelor cuprinse între a și b. Aflați s, știind că $ab = -10$.

Soluție

Deoarece $ab = -10$, rezultă că $a = -10$ și $b = 1$, sau $a = -5$ și $b = 2$, sau $a = -2$ și $b = 5$, sau $a = -1$ și $b = 10$.

Dacă $a = -10$ și $b = 1$, atunci numerele întregi cuprinse între ele sunt : $-9, -8, -7, \ldots, -1$ și 0. Deci, în acest caz, $s = -9 + (-8) + (-7) + \ldots + (-1) = -45$.

Dacă $a = -5$ și $b = 2$, atunci $s = -4 + (-3) + (-2) + (-1) + 1 = -9$.

Dacă $a = -2$ și $b = 5$, atunci $s = -1 + 1 + 2 + 3 + 4 = 9$, iar dacă $a = -1$ și $b = 10$, atunci $s = 1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$.

14. Determinați tripletele (x, y, z) de numere întregi, știind că $x + y + z = 0$ și că xyz este număr natural prim.

R.M.T. 2/1987

Soluție

Remarcăm, mai întâi, că cerința ca xyz să fie număr natural prim ar putea fi îndeplinită numai dacă două dintre numerele considerate au modulul egal cu 1, iar modulul celui de al treilea este număr natural prim. Pentru fixare, să presupunem că $|x| = |y| = 1$. Avem de analizat următoarele situații :

1) $x = y = 1$. Atunci, $2 + z = 0$ (căci $x + y + z = 0$), de unde $z = -2$. Cum $xyz = -2$, iar $-2 \notin \mathbb{N}$, situația considerată nu convine.

2) $x = -1$ și $y = 1$. În acest caz, $z = 0$ (fiindcă $x + y + z = 0$), iar $xyz = 0$. Deoarece 0 nu este număr prim, nici această situație nu convine.

3) $x = y = -1$. Atunci, $-2 + z = 0$, de unde $z = 2$, iar $xyz = 2$. Întrucât 2 este număr natural prim, rezultă că $x = y = -1$ și $z = 2$ este o soluție a problemei. Ca urmare a celor stabilite anterior, tripletele căutate sunt : $(-1, -1, 2)$, $(-1, 2, -1)$ și $(2, -1, -1)$.

15. Arătați că nu există nici un triplet (x, y, z) de numere întregi astfel încât $(x - y)(3x + y) = 4z + 6$.

Soluție

Dacă x și y sunt numere întregi de aceeași paritate, atunci atât $x - y$, cât și $3x + y$ sunt numere întregi pare, ceea ce arată că, în cazul considerat, $4 \mid (x - y)(3x + y)$. Cum $4 \nmid 4z + 6$, rezultă că egalitatea din enunț nu poate avea loc. Dacă x și y sunt numere întregi de parități diferite, atunci atât $x - y$, cât și $3x + y$ sunt numere întregi impare, deci $(x - y)(3x + y)$ este număr impar. Remarcând faptul că $4z + 6$ este număr întreg par, deducem că, și în acest caz, egalitatea din enunț nu poate avea loc. Ca urmare a celor stabilite anterior, cerința enunțului a fost îndeplinită.

16. Fie p produsul a șapte numere întregi negative și distincte. Arătați că, dacă suma lor este -29, atunci $2^7 \mid p$.

Soluție

Evident, cea mai mare valoare a sumei a șapte numere întregi negative și distincte este $-1 + (-2) + (-3) + \ldots + (-7) = -28$. Cum suma numerelor considerate în enunțul problemei este -29, acestea nu pot fi decât $-1, -2, -3, -4, -5, -6$ și -8. Remarcând faptul că $4 = 2^2$, $6 = 2 \cdot 3$, $8 = 2^3$, iar $2 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 2^3 = 2^7$, deducem că $2^7 \mid p$.

17. Arătați că nu există nici o pereche (a, b) de numere întregi astfel încât $a^2 + a + 5b = 123$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție

Deoarece $a^2+a=a(a+1)$, rezultă că $a^2+a\geq 0$ (oricare ar fi $a\in\mathbb{Z}$) și că $u(a^2+a)\in\{0,2,6\}$. Remarcând și faptul că $u(5b)\in\{0,5\}$, deducem că $u(a^2+a+5b)\in\{0,1,2,5,6,7\}$. Cum $u(123)=3$, egalitatea din enunț nu poate avea loc.

18. Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Determinați suma tuturor numerelor pare cuprinse între n^2-n+1 și n^2+n+1.

Soluție

Deoarece $n^2-n+1=n(n-1)+1$ și $n^2+n+1=n(n+1)+1$, iar numerele $n(n-1)$ și $n(n+1)$ sunt pare (oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$), rezultă că n^2-n+1 și n^2+n+1 sunt numere impare. Deducem că cel mai mic număr par ce face parte dintre numerele considerate este n^2-n+2, iar cel mai mare este n^2+n. Cum $n^2+n=(n^2-n)+2n$, rezultă că numerele pare cuprinse între n^2-n+1 și n^2+n+1 sunt : n^2-n+2, n^2-n+4, ..., n^2-n+2n. Prin urmare, suma lor este

$$(n^2-n+2)+(n^2-n+4)+\ \ldots\ +(n^2-n+2n)=(n^2-n)\cdot n+(2+4+\ \ldots\ +2n)=$$
$$=(n^2-n)n+2(1+2+\ \ldots\ +n)=(n^2-n)n+n(n+1)=n(n^2+1).$$

19. Fie $x,\ y,\ z\in\mathbb{Z}$. Arătați că, dacă $2x-3y=5z$, atunci $\dfrac{(x+y)(y+z)}{10}\in\mathbb{Z}$.

Soluție

Adunând $5y$ la ambii membri ai egalității din enunț, obținem $2x+2y=5y+5z$, de unde $2(x+y)=5(y+z)$. Din ultima egalitate deducem că $5\mid 2(x+y)$ și $2\mid 5(y+z)$. Cum $(5,2)=1$, rezultă că $5\mid x+y$ și $2\mid y+z$. Deci, $10\mid(x+y)(y+z)$, ceea ce arată că $\dfrac{(x+y)(y+z)}{10}\in\mathbb{Z}$.

20. Determinați mulțimea $\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\dfrac{2x+7}{3x+5}\in\mathbb{Z}\right\}$.

Soluție

Evident, $\dfrac{2x+7}{3x+5}\in\mathbb{Z}$ dacă și numai dacă $3x+5\mid 2x+7$. Cum $3x+5\mid 3x+5$ (oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}$), rezultă că $3x+5\mid 3(2x+7)-2(3x+5)$, de unde $3x+5\mid 11$, ceea ce poate avea loc doar dacă $3x+5=-11$, sau $3x+5=-1$, sau $3x+5=1$, sau $3x+5=11$. Dacă $3x+5=-11$, atunci $3x=-16$, ceea ce nu este posibil (căci $x\in\mathbb{Z}$). Dacă $3x+5=-1$, atunci $x=-2$. Dacă $3x+5=1$, atunci $3x=-4$, ceea ce nu este posibil. Dacă $3x+5=11$, atunci $x=2$. Drept urmare, mulțimea căutată este $\{-2,2\}$.

21. Determinați perechile $(x,\ y)$ de numere întregi cu proprietatea că $\dfrac{x}{y}=x-y$.

Soluție

Evident, este necesar ca $y\neq 0$.

Fie $(x,\ y)$ o pereche de numere întregi ce verifică egalitatea din enunț. Cum $x-y\in\mathbb{Z}$, egalitatea menționată poate avea loc numai dacă $\dfrac{x}{y}\in\mathbb{Z}$. Ultima cerință este îndeplinită dacă există $n\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x=ny$. Atunci,

Scanned with OKEN Scanner

egalitatea din enunț devine $n = ny - y$, de unde $y = \frac{n}{n-1}$. Întrucât $\frac{n}{n-1} = \frac{n-1+1}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}$, egalitatea anterioară conduce la $y = 1 + \frac{1}{n-1}$. Evident, ultima egalitate este posibilă doar dacă $n-1 \mid 1$, de unde $n-1 = -1$, sau $n-1 = 1$, ceea ce arată că $n = 0$ sau $n = 2$. Dacă $n = 0$, atunci $y = 0$, ceea ce nu convine. Dacă $n = 2$, atunci $y = 2$ și $x = 4$. Prin urmare, perechea $(4, 2)$ este singura soluție a problemei.

22. Determinați numerele întregi x, y și z, știind că $\frac{y}{z} = \frac{2x+5}{3x+7}$ și că $z - y = 2$.

Soluție

Folosind proporții derivate, prima dintre egalitățile din enunț conduce la $\frac{y}{z-y} = \frac{2x+5}{x+2}$. Cum $z - y = 2$, iar $\frac{2x+5}{x+2} = \frac{2(x+2)+1}{x+2} = 2 + \frac{1}{x+2}$, rezultă că $y = 4 + \frac{2}{x+2}$. Având în vedere că $y \in \mathbb{Z}$, ultima egalitate are loc dacă și numai dacă $x+2 \mid 2$, de unde $x+2 \in \{-2, -1, 1, 2\}$ (căci $x \in \mathbb{Z}$).

Dacă $x+2 = -2$, atunci $x = -4$, iar $y = 3$ și $z = 5$.

Dacă $x+2 = -1$, atunci $x = -3$, iar $y = 2$ și $z = 4$.

Dacă $x+2 = 1$, atunci $x = -1$, iar $y = 6$ și $z = 8$.

Dacă $x+2 = 2$, atunci $x = 0$, iar $y = 5$ și $z = 7$.

23. Determinați tripletele (x, y, z) de numere naturale cu proprietatea că $xyz = 2xy + 3z$.

Soluție

Dacă $z = 0$, atunci egalitatea din enunț devine $xy = 0$, de unde $x = 0$ și $y = n$ $(n \in \mathbb{N})$, sau $x = n$ $(n \in \mathbb{N})$ și $y = 0$. Fie $z \neq 0$. Atunci,

$$xyz = 2xy + 3z \Leftrightarrow xy(z-2) = 3z \Leftrightarrow xy = \frac{3z}{z-2} \Leftrightarrow xy = \frac{3(z-2)+6}{z-2} \Leftrightarrow xy = 3 + \frac{6}{z-2}.$$

Deoarece $xy \in \mathbb{N}$ și $z \in \mathbb{N}$, egalitatea $xy = 3 + \frac{6}{z-2}$ are loc dacă și numai dacă $z-2 \in \{1, 2, 3, 6\}$, de unde $z \in \{3, 4, 5, 8\}$.

Dacă $z = 3$, atunci $xy = 9$, ceea ce are loc atunci și numai atunci când $x = 1$, $y = 9$, sau $x = y = 3$, sau $x = 9$, $y = 1$.

Dacă $z = 4$, atunci $xy = 6$, de unde $x = 1$, $y = 6$, sau $x = 2$, $y = 3$, sau $x = 3$, $y = 2$, sau $x = 6$, $y = 1$.

Dacă $z = 5$, atunci $xy = 5$, ceea ce are loc dacă și numai dacă $x = 1$, $y = 5$, sau $x = 5$, $y = 1$.

Dacă $z = 8$, atunci $xy = 4$, de unde $x = 1$, $y = 4$, sau $x = y = 2$, sau $x = 4$, $y = 1$.

Drept urmare, tripletele căutate sunt : $(n, 0, 0)$, $(0, n, 0)$, $(1, 9, 3)$, $(3, 3, 3)$, $(9, 1, 3)$, $(1, 6, 4)$, $(2, 3, 4)$, $(3, 2, 4)$, $(6, 1, 4)$, $(1, 5, 5)$, $(5, 1, 5)$, $(1, 4, 8)$, $(2, 2, 8)$, $(4, 1, 8)$ $(n \in \mathbb{N})$.

24. Fie $a = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{99}$ și $b = 1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^{99}$. Arătați că $3b - 2a = 4^{100} - 3^{100}$.

Soluție

Întrucât $2a = 3a - a = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{99} + 3^{100} - (1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{99}) = 3^{100} - 1$, iar $3b = 4b - b = 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{99} + 4^{100} - (1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^{99}) = 4^{100} - 1$, rezultă că $3b - 2a = 4^{100} - 1 - (3^{100} - 1) = 4^{100} - 3^{100}$.

Scanned with OKEN Scanner

25. Fie $a=(-2)^1+(-2)^2+(-2)^3+\ \dots\ +(-2)^{100}$. Arătați că $3a=2(2^{100}-1)$.

Soluție

Se arată cu ușurință că $a=-2+2^2-2^3+2^4-2^5+2^6+\ \dots\ -2^{99}+2^{100}=2(2-1)+2^3(2-1)+$ $+2^5(2-1)+\ \dots\ +2^{99}(2-1)=2+2^3+2^5+\ \dots\ +2^{99}$. Prin urmare, $4a=2^3+2^5+\ \dots\ +2^{99}+2^{101}$. Rezultă că $4a-a=2^{101}-2$, de unde $3a=2(2^{100}-1)$.

26. Fie $a=3^8-4\cdot3^7+4\cdot3^6-4\cdot3^5+4\cdot3^4-4\cdot3^3+4\cdot3^2-4\cdot3+4$. Arătați că $a=1$.

Soluție

Deoarece $a=3^7(3-4)+4\cdot3^5(3-1)+4\cdot3^3(3-1)+4\cdot3(3-1)+4=-3^7+8\cdot3^5+8\cdot3^3+8\cdot3+4=$ $=3^5(-3^2+8)+8\cdot3^3+8\cdot3+4=-3^5+8\cdot3^3+8\cdot3+4=3^3(-3^2+8)+8\cdot3+4=-3^3+8\cdot3+4=$ $=3(-3^2+8)+4=-3+4=1$, cerința enunțului a fost îndeplinită.

Altfel :

Remarcăm, mai întâi, că $3^8-4\cdot3^7=3^8-(3+1)3^7=-3^7$ și că $-3^7+4\cdot3^6=-3^7+(3+1)3^6=3^6$. În continuare, procedând analog, obținem $a=3^2-4\cdot3+4=3^2-(3+1)\cdot3+4=1$.

27. Fie $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{Z}$ și $a=(3x-2)^n+(2-3x)^n$. Determinați n, astfel încât $a=0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}$.

Soluție

Întrucât $(2-3x)^n=[-1\cdot(3x-2)]^n=(-1)^n(3x-2)^n$, rezultă că $a=(3x-2)^n+(-1)^n(3x-2)^n=$ $=(1+(-1)^n)(3x-2)^n$, ceea ce arată că $a=0$ (oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}$) dacă și numai dacă $1+(-1)^n=0$, egalitate îndeplinită atunci și numai atunci când n este număr natural impar.

28. Fie $n\in\mathbb{N}$. Determinați perechile (x, y) de numere naturale cu proprietatea că

$$x+2y+(-1)^n(5x-3y)-(-1)^{n+1}(2x-3y)+(-1)^{3n+1}(6x-8y)=12.$$

Soluție

Deoarece $(-1)^{n+1}=(-1)\cdot(-1)^n=-(-1)^n$ și $(-1)^{3n+1}=(-1)^{2n+1}\cdot(-1)^n=-(-1)^n$, egalitatea din enunț conduce la $x+2y+(-1)^n(5x-3y)+(-1)^n(2x-3y)-(-1)^n(6x-8y)=12$, de unde $x+2y+(-1)^n(x+2y)=12$.

Dacă n este un număr impar, atunci ultima egalitate nu este posibilă.

Dacă n este număr par, egalitatea menționată anterior devine $x+2y=6$, ceea ce are loc dacă și numai dacă $x=0$, $y=3$, sau $x=y=2$, sau $x=4$, $y=1$, sau $x=6$, $y=0$.

Drept urmare, dacă n este număr impar, atunci problema nu are nici o soluție, iar dacă n este număr par, atunci perechile : $(0, 3)$, $(2, 2)$, $(4, 1)$ și $(6, 0)$ sunt soluțiile problemei.

29. Suma modulelor a zece numere întregi distincte este 26. Aflați modulul sumei acestor numere.

Soluție

Zece numere întregi distincte cu modulele cele mai mici sunt : $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ sau $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Remarcăm că în fiecare din aceste situații suma modulelor numerelor respective este 25. Ținând seama de faptul că suma considerată în enunț este 26, cele zece numere nu pot fi decât $-6, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ sau $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 6$. Cum în prima situație suma numerelor este -6, iar în cea de a doua, 6, rezultă că modulul sumei numerelor considerate este 6.

30. Fie $x, y\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$. Arătați că $|xy-2y|-|x+2y|=|xy+x|$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție

Întrucât $x, y \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, rezultă că $x < 0$ și $y < 0$. Drept urmare, $xy - 2y > 0$ și $x + 2y < 0$, ceea ce implică $|xy - 2y| - |x + 2y| = xy - 2y + (x + 2y) = xy + x$. Remarcând faptul că $xy + x = x(y + 1)$, iar $x < 0$ și $y + 1 \leq 0$ (căci $y \in \mathbb{Z}$, și $y < 0$ implică $y \leq -1$), deducem că $xy + x \geq 0$, ceea ce conduce la $|xy + x| = xy + x$. Ca urmare a celor stabilite anterior, cerința enunțului a fost îndeplinită.

31. Determinați perechile (x, y) de numere întregi cu proprietatea că $5x - 3y = 15$, iar $|x - y|$ ia cea mai mică valoare posibilă.

Soluție

Deoarece $x, y \in \mathbb{Z}$, rezultă că $|x - y| \in \mathbb{N}$.

Evident, trebuie să analizăm, mai întâi, cazul în care $|x - y| = 0$. Atunci, $x = y$, iar egalitatea $5x - 3y = 15$ conduce la $2x = 15$. Cum ultima egalitate nu este posibilă (căci $x \in \mathbb{Z}$), situația considerată nu convine.

Să considerăm cazul în care $|x - y| = 1$. Atunci, $x - y = 1$ sau $x - y = -1$. Dacă $x - y = 1$, egalitatea din enunț conduce la $5x - 3(x - 1) = 15$, de unde $x = 6$. Rezultă că $y = 5$. Prin urmare, perechea $(6, 5)$ este o soluție a problemei. Dacă $x - y = -1$, egalitatea din enunț devine $5x - 3(x + 1) = 15$, de unde $x = 9$, iar $y = 10$. Drept urmare, și perechea $(9, 10)$ este o soluție a problemei.

32. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$. Arătați că, dacă $|x_1| = |x_2| = \ldots = |x_n| = 1$ și $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = -n$, atunci n este număr par, iar $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$.

Soluție

Întrucât $|x_1x_2| = |x_2x_3| = \ldots = |x_{n-1}x_n| = |x_nx_1| = 1$ (căci $|x_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$) și $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = -n$, rezultă că $x_1x_2 = x_2x_3 = \ldots = x_{n-1}x_n = x_nx_1 = -1$, de unde $(x_1x_2) \cdot (x_2x_3) \cdot \ldots \cdot (x_{n-1}x_n) \cdot (x_nx_1) = (-1)^n$, ceea ce conduce la $(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^2 = (-1)^n$. Cum membrul întâi al ultimei egalități este număr pozitiv, aceasta poate avea loc doar dacă n este număr par.

Remarcând faptul că $x_1x_2 = -1$, iar $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, deducem că $x_1 = -1$ și $x_2 = 1$, sau $x_1 = 1$ și $x_2 = -1$, ceea ce implică $x_1 + x_2 = 0$. Analog, arătăm că $x_2 + x_3 = 0, \ldots, x_{n-1} + x_n = 0$ și $x_n + x_1 = 0$. Adunând ultimele n egalități membru cu membru, obținem $2(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n) = 0$, de unde $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = 0$.

33. Într-o urnă sunt 90 de bile numerotate de la 1 la 90. Aflați numărul minim de bile ce trebuie extrase din urnă, astfel încât printre ele să existe totdeauna două cu numerele înscrise pe ele având modulul diferenței lor mai mic decât 15.

Soluție

Vom arăta, mai întâi, că numărul căutat trebuie să depășească 6. Într-adevăr, extrăgând șase bile, acestea pot fi cele numerotate cu 1, 16, 31, 46, 61 și 76. În acest caz, modulul diferenței a două dintre numere este totdeauna mai mare sau egal cu 15. Totodată, deducem că, extrăgând mai puțin de șase bile, condiția impusă pentru bilele extrase nu poate fi îndeplinită. Să arătăm că, extrăgând șapte bile, respectiva condiție poate fi îndeplinită. Pentru aceasta, vom distribui cele 90 de numere înscrise pe

Scanned with OKEN Scanner

bilele din urnă în șase grupe, și anume : în prima grupă numerele de la 1 la 15, în cea de a doua numerele de la 16 la 30, în cea de a treia numerele de la 31 la 45, în cea de a patra numerele de la 46 la 60, în cea de a cincea numerele de la 61 la 75 și în cea de a șasea numerele de la 76 la 90. Remarcăm faptul că, în cadrul fiecărei grupe modulul diferenței a două dintre numerele grupei nu depășește 14, precum și faptul că, oricum am extrage șapte bile, cel puțin două fac parte din aceeași grupă (căci sunt numai șase grupe). Având în vedere cele stabilite anterior, soluția problemei este 7.

34. **Fie șirul de numere naturale** $3, 9, 18, 30, \ldots$ **construit astfel :** $3 = 1 + 2$, $9 = 2 + 3 + 4$, $18 = 3 + 4 + 5 + 6$, $30 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8$, ...

a) Aflați al zecelea termen al șirului.

b) Stabiliți dacă 2000 **este termen al șirului.**

O.M., etapa locală, Dolj, 2001

Soluție

a) Fie a_n termenul șirului considerat ce ocupă în șir locul n. Remarcând că $a_1 = 1 + (1 + 1)$, $a_2 = 2 + (2 + 1) + (2 + 2)$, $a_3 = 3 + (3 + 1) + (3 + 2) + (3 + 3)$, deducem că $a_n = n + (n + 1) + (n + 2) + \ldots + (n + n)$. Rezultă că $a_n = 1 + 2 + \ldots + n + (n + 1) + \ldots + 2n - [1 + 2 + \ldots + (n - 1)] = \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{3n(n+1)}{2}$ (căci $1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$). Drept urmare, $a_{10} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 11}{2} = 165$.

b) Presupunem că 2000 este termen al șirului considerat și că acesta ocupă în șir locul n. Atunci, $a_n = 2000$, ceea ce conduce la $\frac{3n(n+1)}{2} = 2000$, de unde $3n(n + 1) = 4000$. Cum $3 \nmid 4000$, ultima egalitate nu este posibilă, deci 2000 nu este termen al șirului considerat.

35. **Fie** $x, y \in \mathbb{Z}$. **Arătați că, dacă** $7x > 5y$ **și** $15x < 11y$, **atunci** $7x + 4y \geq 100$.

Soluție

Deoarece $7x, 5y \in \mathbb{Z}$ și $7x > 5y$, rezultă că $7x \geq 5y + 1$. Înmulțind ambii membri ai acestei inegalități cu 15, obținem $105x \geq 75y + 15$.

Întrucât $15x, 11y \in \mathbb{Z}$ și $15x < 11y$, rezultă că $15x \leq 11y - 1$. Înmulțind ambii membri ai ultimei egalități cu 7, obținem $105x \leq 77y - 7$.

Ținând seama de cele stabilite anterior, deducem că $77y - 7 \geq 75y + 15$, de unde $2y \geq 22$, ceea ce implică $y \geq 11$. Prin urmare, $5y + 1 \geq 56$. Cum $7x \geq 5y + 1$, rezultă că $7x \geq 56$, de unde $x \geq 8$. În consecință, $7x + 4y \geq 7 \cdot 8 + 4 \cdot 11 = 100$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

PROBLEME PROPUSE

1. În dimineața unei zile, termometrul arăta $-5°C$. Până la prânz, temperatura a crescut cu $12°$; spre seară, temperatura a scăzut cu $4°$, iar peste noapte, temperatura a scăzut cu încă $7°$. Precizați care a fost ultima temperatură indicată de termometru.

2. Calculați suma $s = 1 + 2 - 3 + 4 + 5 - 6 + 7 + 8 - 9 + \ldots + 97 + 98 - 99$.

3. Calculați suma $s = 1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \ldots$, știind că aceasta are o sută de termeni.

Scanned with OKEN Scanner

4. Suma a zece numere întregi consecutive este 25. Aflați termenii sumei.

5. Suma mai multor numere întregi consecutive este 2003. Aflați câți termeni are suma, știind că numărul termenilor strict pozitivi este cu 2 mai mare decât numărul celor negativi.

6. Distribuiți primele 60 de numere naturale nenule în două grupe astfel încât prima dintre grupe să aibă 42 de numere, iar suma numerelor din fiecare grupă să fie aceeași.

7. Este posibil ca elementele mulțimii $A = \{-1, -2, -3, \ldots, -50\}$ să fie distribuite în două submulțimi disjuncte ale lui A astfel încât suma elementelor fiecărei submulțimi să fie aceeași ?

8. Faceți o alegere a semnelor $+$ și $-$ astfel încât șirul operațiilor $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \ldots \pm 16$ să conducă la : a) 64 ; b) 46 ; c) 94.

9. Determinați cifrele a și b, știind că $\overline{ab} - \overline{ba} = 63$.

10. Determinați numărul $\overline{ab}$, știind că $\overline{ab} - \overline{ba} = 18$ și că $\overline{ab}$ este atât pătrat perfect, cât și cub perfect.

11. Arătați că nu există nici un triplet (x, y, z) de numere întregi astfel încât $(x-y)(x+y) = 4z - 2$.

12. Arătați că nu există nici o pereche (a, b) de numere naturale astfel încât $a^2 + a + 5b = 234$.

13. Fie p produsul numerelor $x \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $3 < |x| \leq 8$. Arătați că $2^{12} | p$.

14. Fie p produsul a nouă numere întregi negative și distincte. Arătați că, dacă suma lor este -46, atunci $2^8 | p$.

15. Aflați patru numere întregi, diferite de -1 și 1, al căror produs să fie -2002.

16. Se consideră câteva numere întregi consecutive. Fie a cel mai mic și b cel mai mare dintre aceste numere, iar s suma numerelor cuprinse între a și b. Aflați s, știind că $ab = -15$.

17. Determinați tripletele (x, y, z) de numere întregi, știind că $x + y + z = 1$ și că xyz este număr natural prim.

18. Determinați tripletele (x, y, z) de numere întregi, cu proprietatea că $(2x+1)(y+3)(4z-3) = 2$.

19. Fie $x \in \mathbb{Z}$ și y un număr natural prim. Determinați valorile lui x și y, știind că $x^2 + x = y + 10$.

20. Fie $x \in \mathbb{Z}$ și $a = \dfrac{10x+4}{2x-1}$. Aflați valorile lui x pentru care $a \in \mathbb{Z}$.

21. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Arătați că, dacă $5a - 7b - 28c = 0$, atunci $\dfrac{ab - ac}{35} \in \mathbb{Z}$.

22. Determinați perechile (x, y) de numere întregi nenule cu proprietatea că $\dfrac{4}{x} - \dfrac{5}{y} = 2$.

23. Determinați perechile (x, y) de numere întregi cu proprietatea că $xy - x + y + 2 = 0$.

24. Determinați tripletele (x, y, z) de numere întregi, știind că $\dfrac{y}{z} = \dfrac{x+4}{4x+6}$ și că $z - y = 3$.

25. Fie $a = (-1)^1 + 2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^3 + \ldots + 100 \cdot (-1)^{100}$. Arătați că $a = 50$.

Scanned with OKEN Scanner

26. Fie $a=(-1)^1+(-1)^3+(-1)^5+\ \ldots\ +(-1)^{2003}$ și $b=(-1)\cdot(-1)^3\cdot(-1)^5\cdot\ \ldots\ \cdot(-1)^{2003}$. Calculați $a+b$ și ab.

27. Arătați că $4^n+3\cdot4^n+5\cdot4^n+7\cdot4^n=4^{n+2}$ și că $4^n-5\cdot4^n+9\cdot4^n-13\cdot4^n+17\cdot4^n-21\cdot4^n+25\cdot4^n-29\cdot4^n=-4^{n+2}$.

28. Fie $a=|(-1)\cdot(-2)+(-1)\cdot(-3)+(-2)\cdot(-3)-(-1)(1-2-3)-(-2)(-1+2-3)-(-3)(-1-2+3)|(-1-2-3)$ și $b=(-1)^3+(-2)^3+(-3)^3-3(-1)(-2)(-3)$. Arătați că $a=b$.

29. Calculați $(1\cdot2-2\cdot3+3\cdot4-4\cdot5)\left[2\cdot2^2\cdot2^3\cdot2^4\cdot2^5+\left(-2^3\right)^5+\left(3^5\right)^3+9^{10}:(-3)^5-1\right]$.

30. Fie $a=4^{11}-5\cdot4^{10}+5\cdot4^9-5\cdot4^8+\ \ldots\ +5\cdot4-5$. Arătați că $a=-1$.

31. Determinați mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,|2x-3|=2|x|-3 \text{ și } x\le 8\right\}$.

32. Determinați perechile $(x,\ y)$ de numere întregi, știind că $xy\le 0$, $|x|=y-1$ și $-x-y+5>0$.

33. Determinați perechile $(x,\ y)$ de numere întregi, știind că $x^2(9-|y|)=32$.

34. Suma modulelor a douăsprezece numere întregi distincte este 37. Aflați modulul sumei acestor numere.

35. Fie $x,\ y\in\mathbb{Z}^*$. Arătați că, dacă $7x>5y$ și $25x<18y$, atunci $3x+2y\ge133$.

RĂSPUNSURI

1. $-4°C$ **2.** 1584 **3.** -100 **4.** $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,7$ **5.** 2003 **7.** Nu **9.** $a=8,\ b=1$ sau $a=7,\ b=2$ **10.** 64 **15.** $-2,\ 7,\ 11,\ 13;\ 2,\ -7,\ 11,\ 13;\ 2,\ 7,\ -11,\ 13;\ 2,\ 7,\ 11,\ -13;\ 2,\ -7,\ -11,\ -13;\ -2,\ 7,\ -11,\ -13;\ -2,\ -7,\ 11,\ -13;\ -2,\ -7,\ -11,\ 13$ **16.** $s\in\{-105,\ -7,\ 7,\ 105\}$ **17.** $(-1,\ -1,\ 3),\ (-1,\ 3,\ -1),\ (3,\ -1,\ -1)$ **18.** $(-1,\ -5,\ 1),\ (0,\ -1,\ 1)$ **19.** $x=-4,\ y=2$ sau $x=3,\ y=2$ **20.** $x\in\{-4,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 5\}$ **22.** $(-8,\ -2),\ (4,\ -5),\ (12,\ -3)$ **23.** $(-4,\ 2),\ (-2,\ 4),\ (0,\ -2),\ (2,\ 0)$ **24.** $(-4,\ 0,\ 3),\ (-1,\ -9,\ -6),\ (0,\ 6,\ 9),\ (1,\ 3,\ 6)$ **26.** $a+b=-1001,\ ab=-1002$ **29.** 12 **31.** $A=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ **32.** $(-1,\ 2),\ (0,\ 1)$ **33.** $(-4,\ -7),\ (-4,\ 7),\ (-2,\ -1),\ (-2,\ 1),\ (2,\ -1),\ (2,\ 1),\ (4,\ -7),\ (4,\ 7)$ **34.** 13.

Scanned with OKEN Scanner

§2. NUMERE RAȚIONALE

PROBLEME REZOLVATE

1. **Fie $a \in \mathbb{Q}$. Arătați că, dacă $a^2 \in \mathbb{N}$, atunci $a \in \mathbb{Z}$.**

Soluție

Deoarece $a \in \mathbb{Q}$, există $m, n \in \mathbb{Z}$, cu $n \neq 0$, astfel încât $a = \frac{m}{n}$, ceea ce implică $a^2 = \frac{m^2}{n^2}$. Remarcând faptul că $\frac{m^2}{n^2} \in \mathbb{N}$ (căci $a^2 \in \mathbb{N}$), deducem că $n^2 | m^2$, de unde $n | m$. Drept urmare, $a \in \mathbb{Z}$.

2. **Arătați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$, numerele raționale $\frac{5n-3}{4}$ și $\frac{7n-2}{6}$ nu pot fi simultan întregi.**

Soluție

Presupunem, din contra, că există $n \in \mathbb{Z}$ astfel încât atât $\frac{5n-3}{4}$, cât și $\frac{7n-2}{6}$ să fie numere întregi. Atunci, $4 | 5n-3$ și $6 | 7n-2$, ceea ce impune $2 | 5n-3$ și $2 | 7n-2$, de unde $2 | 7n-2-(5n-3)$ și, deci, $2 | 2n+1$. Cum această condiție nu poate fi îndeplinită, presupunerea făcută este falsă.

3. **Fie $a, x \in \mathbb{Z}$. Fracția $\frac{5x-9}{x+3a}$ ia valoarea 1 pentru $x = 3$. Aflați pentru ce valoare a lui x fracția considerată ia valoarea 3.**

Soluție

Întrucât, pentru $x = 3$, fracția $\frac{5x-9}{x+3a}$ ia valoarea 1, rezultă că $\frac{15-9}{3+3a} = 1$, de unde $3a+3 = 6$, ceea ce conduce la $a = 1$. Astfel, fracția considerată devine $\frac{5x-9}{x+3}$. Dacă $\frac{5x-9}{x+3} = 3$, atunci $5x-9 = 3x+9$, de unde $x = 9$.

4. **Arătați că suma dintre un număr natural și o fracție ireductibilă, cu termenii strict pozitivi, este tot o fracție ireductibilă.**

Soluție

Fie $n \in \mathbb{N}$ și $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}^*$) o fracție ireductibilă. Evident, $n + \frac{a}{b} = \frac{nb+a}{b}$. Fie $d = (nb+a, b)$. Atunci, $d | nb+a$ și $d | b$, ceea ce conduce la $d | nb+a-nb$, de unde $d | a$. Cum $d | a$ și $d | b$, iar fracția $\frac{a}{b}$ este ireductibilă, nu putem avea decât $d = 1$. Deci, fracția $\frac{nb+a}{b}$ este și ea ireductibilă.

5. **Determinați valorile lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care fracția $\frac{2n+3}{3n+2}$ este reductibilă.**

Soluție

Fie $d \in \mathbb{N}^*$, $d \neq 1$, un divizor comun al numerelor $2n+3$ și $3n+2$. Atunci, $d | 3(2n+3) - 2(3n+2)$, de unde $d | 5$, ceea ce implică $d = 5$. Cum $5 | 3n+2$ și $5 | 2n+3$, rezultă că $5 | 3n+2-(2n+3)$, de unde $5 | n-1$, ceea ce are loc dacă și numai dacă $n-1 = 5k$ și $k \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare, pentru $n = 5k+1$ ($k \in \mathbb{N}^*$), fracția considerată este reductibilă.

Scanned with OKEN Scanner

6. **Arătați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ nedivizibil cu 3, fracția $\frac{(n+1)(4n-1)}{(2n+1)(4n+1)}$ se simplifică cu 3.**

Soluție

Deoarece $n \in \mathbb{N}^*$ și $3 \nmid n$, rezultă că $n = 3k+1$ sau $n = 3k+2$ $(k \in \mathbb{N})$. Dacă $n = 3k+1$ $(k \in \mathbb{N})$, atunci $4n-1 = 4(3k+1)-1 = 3(4k+1)$ și $2n+1 = 2(3k+1)+1 = 3(2k+1)$, ceea ce arată că, în acest caz, fracția considerată se simplifică cu 3. Dacă $n = 3k+2$ $(k \in \mathbb{N})$, atunci $n+1 = 3(k+1)$ și $4n+1 = 3(4k+3)$, deci, și în acest caz, fracția considerată se simplifică cu 3.
Astfel, cerința enunțului a fost îndeplinită.

7. **Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați mulțimea $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \,\middle|\, x = \frac{2n^2+5n+3}{n^2+1} \right\}$.**

Soluție

Evident, $x = \frac{2(n^2+1)+5n+1}{n^2+1} = 2 + \frac{5n+1}{n^2+1}$.

Fie $n \in \mathbb{N}$ și $n > 5$. Atunci, $5n < n^2$, ceea ce implică $0 < 5n+1 < n^2+1$, de unde $0 < \frac{5n+1}{n^2+1} < 1$. Rezultă că, în cazul considerat, $x \notin \mathbb{N}$. Rămâne să analizăm doar situațiile în care $n \leq 5$.

Dacă $n = 1$, atunci $x = 5$. Dacă $n = 2$, atunci $x = \frac{21}{5}$. Cum $\frac{21}{5} \notin \mathbb{N}$, $n = 2$ nu convine. Analog, arătăm că nici $n = 3$ și nici $n = 4$ nu convin. Dacă $n = 5$, atunci $x = 3$. Din cele stabilite anterior deducem că $A = \{3, 5\}$.

8. **Fie mulțimile $A = \left\{ x \in \mathbb{Q} \,\middle|\, x = \frac{2m+1}{2m+3},\ m \in \mathbb{Z} \right\}$ și $B = \left\{ y \in \mathbb{Q} \,\middle|\, y = \frac{3n+1}{3n+2},\ n \in \mathbb{Z} \right\}$.**

Arătați că $A \cap B = \varnothing$.

Soluție

Presupunem, din contra, că $A \cap B \neq \varnothing$. Atunci, există $m, n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x = y$. Rezultă că $\frac{2m+1}{2m+3} = \frac{3n+1}{3n+2}$, ceea ce conduce la $(2m+1)(3n+2) = (2m+3)(3n+1)$, de unde $2m - 6n = 1$. Cum ultima egalitate nu este posibilă (căci $2m-6n$ este număr întreg par, oricare ar fi $m, n \in \mathbb{Z}$), presupunerea făcută este falsă. În consecință, $A \cap B = \varnothing$.

9. **a) Fie $n \in \mathbb{N}$. Aflați numărul fracțiilor subunitare de forma $\frac{3n+4}{56}$.**

b) Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Determinați numărul fracțiilor supraunitare de forma $\frac{67}{4n+5}$.

Soluție

a) Fracția $\frac{3n+4}{56}$ este subunitară dacă și numai dacă $3n+4 < 56$, ceea ce conduce la $n < 17\frac{1}{3}$. Cum $n \in \mathbb{N}$, numărul căutat este 18.

b) Fracția $\frac{67}{4n+5}$ este supraunitară dacă și numai dacă $4n+5 < 67$, de unde $n < 15\frac{1}{2}$. Remarcând faptul că $n \in \mathbb{N}^*$, numărul căutat este 15.

Scanned with OKEN Scanner

10. Determinați valorile lui $n \in \mathbb{Z}$ pentru care $-3 \leq \frac{5n+6}{3} < 7$.

Soluție

Întrucât $\frac{5n+6}{3} \geq -3$, rezultă că $5n+6 \geq -9$, de unde $n \geq -3$. Totodată, $\frac{5n+6}{3} < 7$, ceea ce conduce la $5n+6 < 21$, de unde $n < 3$. Ținând seama și de faptul că $n \in \mathbb{Z}$, deducem că $n \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$.

11. Fie $n \in \mathbb{N}$ și numerele raționale $a = \frac{3n-2}{15}$, $b = \frac{172}{3n+1}$. Determinați valorile lui n pentru care atât partea întreagă a lui a, cât și partea întreagă a lui b este 3.

Soluție

Partea întreagă a lui a este 3 dacă și numai dacă $3 \leq a < 4$. Atunci, $\frac{3n-2}{15} \geq 3$ și $\frac{3n-2}{15} < 4$, ceea ce conduce la $3n-2 \geq 45$ și $3n-2 < 60$, de unde $n \geq 15\frac{2}{3}$ și $n < 20\frac{2}{3}$. Cum $n \in \mathbb{N}$, rezultă că $n \in \{16, 17, 18, 19, 20\}$.

Partea întreagă a lui b este 3 atunci și numai atunci când $3 \leq b < 4$. Rezultă că $\frac{172}{3n+1} \geq 3$ și $\frac{172}{3n+1} < 4$, ceea ce implică $9n+3 \leq 172$ și $12n+4 > 172$, de unde $n \leq 18\frac{7}{9}$ și $n > 14$. Având în vedere și faptul că $n \in \mathbb{N}$, deducem că $n \in \{15, 16, 17, 18\}$.

Ținând seama de cele stabilite anterior, conchidem că $n \in \{16, 17, 18\}$.

12. Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$ și numerele raționale $\frac{a}{4}$, $\frac{5}{b+1}$, $\frac{2b+1}{6}$, $\frac{a+b}{8}$. Determinați perechile (a, b) pentru care dintre cele patru numere raționale considerate numai unul este egal cu 1 și numai unul este mai mare decât 1.

Soluție

Avem de analizat următoarele situații :

I. $\frac{a}{4} = 1$. În acest caz, $a = 4$.

1) Dacă $\frac{5}{b+1} > 1$, atunci $b < 4$. Cum $a+b < 4+4 = 8$, rezultă că $\frac{a+b}{8} < 1$. Deoarece $b < 4$ și $b \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $b \in \{1, 2, 3\}$. Având în vedere că, dacă $b = 1$ sau $b = 2$, atunci $\frac{2b+1}{6} < 1$, iar dacă $b = 3$, atunci $\frac{2b+1}{6} > 1$, deducem că numai $b = 1$ și $b = 2$ convin.

2) Dacă $\frac{5}{b+1} < 1$, atunci $b > 4$. Întrucât, în acest caz, $2b+1 > 9$ și $a+b > 8$, rezultă că atât $\frac{2b+1}{6} > 1$, cât și $\frac{a+b}{8} > 1$, ceea ce arată că nu putem avea $\frac{5}{b+1} < 1$.

Din 1) și 2) rezultă că, în situația considerată, numai perechile $(4, 1)$ și $(4, 2)$ sunt soluții ale problemei.

II. $\frac{5}{b+1} = 1$. Atunci, $b = 4$. Cum, în acest caz, $\frac{2b+1}{6} = \frac{3}{2} > 1$, este necesar ca $\frac{a}{4} < 1$, de unde $a < 4$. Rezultă că $a+b < 8$, deci $\frac{a+b}{8} < 1$. Deoarece $a < 4$ și $a \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $a \in \{1, 2, 3\}$. Drept urmare, în situația considerată,

Scanned with OKEN Scanner

perechile : (1, 4), (2, 4), (3, 4) sunt soluții ale problemei.

III. $\frac{2b+1}{6}=1$. În acest caz, $b=\frac{5}{2}$. Întrucât $\frac{5}{2}\notin \mathbf{N}$, situația considerată nu convine.

IV. $\frac{a+b}{8}=1$. Atunci, $a+b=8$.

1) Dacă $a\geq 4$, atunci $b\leq 4$, de unde $\frac{a}{4}\geq 1$ și $\frac{5}{b+1}\geq 1$, ceea ce nu convine.

2) Dacă $a<4$, atunci $b>4$. Rezultă că $\frac{a}{4}<1$, $\frac{5}{b+1}<1$ și $\frac{2b+1}{6}>1$. Deci, în acest caz, toate condițiile din enunț sunt îndeplinite. Remarcând faptul că $a\in \mathbf{N}$, $a<4$ și $a+b=8$, deducem că, în situația considerată, soluțiile problemei sunt perechile : (1, 7), (2, 6) și (3, 5).

Ca urmare a celor stabilite anterior, perechile căutate sunt : (1, 4), (1, 7), (2, 4), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (4, 1) și (4, 2).

13. Determinați $x, y, z\in \mathbf{Q}$, **știind că** $x+y=\frac{1}{6}$, $y-z=-\frac{1}{2}$ **și** $x+3y-z=-\frac{2}{3}$.

Soluție

Evident, a treia dintre egalitățile din enunț poate fi scrisă sub forma $(x+y)+y+(y-z)=-\frac{2}{3}$. Cum $x+y=\frac{1}{6}$ și $y-z=-\frac{1}{2}$, rezultă că $y+\frac{1}{6}+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{2}{3}$, de unde $y=-\frac{1}{3}$. Având în vedere că $x+y=\frac{1}{6}$ și $y=-\frac{1}{3}$, deducem că $x-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, ceea ce conduce la $x=\frac{1}{2}$. Din $y-z=-\frac{1}{2}$ și $y=-\frac{1}{3}$ rezultă că $z=-\frac{1}{6}$.

14. Determinați $x, y, z\in \mathbf{Q}$, **știind că** $2x+y=-\frac{1}{6}$, $2y+z=\frac{1}{6}$ **și** $4x+3y-z=1$.

Soluție

Evident, ultima dintre egalitățile din enunț poate fi scrisă sub forma $4x+2y-2y-z+3y=1$, ceea ce conduce la $2(2x+y)-(2y+z)+3y=1$. Ținând seama și de faptul că $2x+y=-\frac{1}{6}$, iar $2y+z=\frac{1}{6}$, deducem că $-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+3y=1$, ceea ce implică $y=\frac{1}{2}$. Deoarece $2x+y=\frac{1}{6}$ și $y=\frac{1}{2}$, rezultă că $2x+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$, de unde $x=-\frac{1}{3}$. Din $2y+z=\frac{1}{6}$ și $y=\frac{1}{2}$ deducem că $z=-\frac{5}{6}$.

15. Fie $a=2-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\ \ldots\ +\frac{2002}{2001}-\frac{2003}{2002}$ **și** $b=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ \ldots\ +\frac{1}{2001}-\frac{1}{2002}$.

Arătați că $a=b$.

Soluție

Întrucât $a-b=(2-1)+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{4}\right)+\ \ldots\ +\left(\frac{2002}{2001}-\frac{1}{2001}\right)+\left(\frac{1}{2002}-\frac{2003}{2002}\right)=$

$=1+(-1)+1+(-1)+\ \ldots\ +1+(-1)=0$, rezultă că $a=b$.

16. Fie $a=-1+\frac{11}{2}-\frac{21}{3}+\frac{31}{4}-\frac{41}{5}+\frac{51}{6}-\frac{61}{7}+\frac{71}{8}-\frac{81}{9}+\frac{91}{10}$ **și** $b=1+\frac{1}{6}+\frac{1}{15}+\frac{1}{28}+\frac{1}{45}$.

Arătați că $2a=9b$.

Soluție

Deoarece $a=\left(-1+\frac{11}{2}\right)+\left(-\frac{21}{3}+\frac{31}{4}\right)+\left(-\frac{41}{5}+\frac{51}{6}\right)+\left(-\frac{61}{7}+\frac{71}{8}\right)+\left(-\frac{81}{9}+\frac{91}{10}\right)=\frac{9}{2}+\frac{9}{12}+\frac{9}{30}+$

Scanned with OKEN Scanner

$+\frac{9}{56}+\frac{9}{90}=\frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{6}+\frac{1}{15}+\frac{1}{28}+\frac{1}{45}\right)$, rezultă că $a=\frac{9}{2}\cdot b$, de unde $2a=9b$.

17. Fie $a=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{15}$. **Arătați că** $a<3$.

Soluție

Întrucât $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2\cdot\frac{1}{2}=1$, $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$ și $\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{15}<8\cdot\frac{1}{8}=1$, rezultă că $a<1+1+1=3$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

18. Fie $a=\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\frac{1}{8\cdot11}+\ldots+\frac{1}{47\cdot50}$. **Arătați că** $a<\frac{1}{6}$.

Soluție

Se observă cu ușurință că $a=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2\cdot5}+\frac{3}{5\cdot8}+\frac{3}{8\cdot11}+\ldots+\frac{3}{47\cdot50}\right)=$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{5-2}{2\cdot5}+\frac{8-5}{5\cdot8}+\frac{11-8}{8\cdot11}+\ldots+\frac{50-47}{47\cdot50}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{47}-\frac{1}{50}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{50}\right)=$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{25}=\frac{4}{25}$. Remarcând și faptul că $\frac{4}{25}<\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$, deducem că $a<\frac{1}{6}$.

19. Fie $s=1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\ldots+\frac{1}{1+2+3+\ldots+99}+\frac{1}{50}$.

Arătați că $s=2$.

Soluție

Deoarece $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ (oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$), rezultă că $1+2=\frac{2\cdot3}{2}$, $1+2+3=\frac{3\cdot4}{2}$, $1+2+3+4=\frac{4\cdot5}{2}$, $\ldots$, $1+2+3+\ldots+99=\frac{99\cdot100}{2}$, de unde

$s=1+\frac{2}{2\cdot3}+\frac{2}{3\cdot4}+\frac{2}{4\cdot5}+\ldots+\frac{2}{99\cdot100}+\frac{1}{50}=1+2\left(\frac{3-2}{2\cdot3}+\frac{4-3}{3\cdot4}+\frac{5-4}{4\cdot5}+\ldots+\frac{100-99}{99\cdot100}\right)+$

$+\frac{1}{50}=1+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)+\frac{1}{50}=1+2\cdot\frac{49}{100}+\frac{1}{50}=2$.

20. Fie $a=-\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{9}\cdot\left(-\frac{3}{12}\right)\cdot\frac{4}{15}\cdot\ldots\cdot\frac{98}{297}\cdot\left(-\frac{99}{300}\right)\cdot3^{99}$. **Arătați că** $a=\frac{1}{100}$.

Soluție

Întrucât $a=(-1)^{50}\cdot\frac{1}{3\cdot2}\cdot\frac{2}{3\cdot3}\cdot\frac{3}{3\cdot4}\cdot\frac{4}{3\cdot5}\cdot\ldots\cdot\frac{98}{3\cdot99}\cdot\frac{99}{3\cdot100}\cdot3^{99}=\frac{1}{3^{99}\cdot100}\cdot3^{99}=\frac{1}{100}$, cerința enunțului a fost îndeplinită.

21. Determinați cel mai mare număr rațional care, înmulțit cu $-2\frac{1}{2}$, dă ca rezultat un număr natural nenul.

Soluție

Fie x numărul căutat și $n\in\mathbb{N}^*$ rezultatul înmulțirii lui $-2\frac{1}{2}$ cu x. Atunci, $-2\frac{1}{2}\cdot x=n$, ceea ce conduce la $-\frac{5}{2}\cdot x=n$, de unde $x=-\frac{2}{5}\cdot n$. Cum $-\frac{2}{5}<0$, iar x trebuie să fie cel mai mare posibil, rezultă că n trebuie să fie cel mai mic posibil. Având în vedere că $n\in\mathbb{N}^*$, nu putem avea decât $n=1$, deci $x=-\frac{2}{5}$.

22. Determinați $x\in\mathbb{Q}^*$, știind că $\frac{2|x|-1}{|x|}\in\mathbb{N}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție

Deoarece $\frac{2|x|-1}{|x|}=2-\frac{1}{|x|}$, condiția impusă în enunț este îndeplinită dacă și numai dacă $\frac{1}{|x|}\in\mathbb{N}$ și $\frac{1}{|x|}\leq 2$, de unde $\frac{1}{|x|}=1$ sau $\frac{1}{|x|}=2$. Dacă $\frac{1}{|x|}=1$, atunci $|x|=1$, deci $x=-1$ sau $x=1$. Dacă $\frac{1}{|x|}=2$, atunci $|x|=\frac{1}{2}$, de unde $x=-\frac{1}{2}$ sau $x=\frac{1}{2}$. Drept urmare, $x\in\left\{-1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right\}$.

23. **Fie $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{N}^*$ și numărul rațional $r=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$. Arătați că, dacă $a,\ b,\ c,\ d$ sunt direct proporționale cu $2,\ 4,\ 5,\ 6$, atunci r se transformă într-o fracție zecimală periodică mixtă.**

Soluție

Întrucât $\frac{a}{2}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}=\frac{d}{6}$, există $k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $a=2k,\ b=4k,\ c=5k,\ d=6k$. Atunci, $r=\frac{1}{2k}+\frac{1}{4k}+\frac{1}{5k}+\frac{1}{6k}=\frac{67}{60k}=\frac{67}{2^2\cdot 3\cdot 5k}$. Întrucât 67 este număr prim, rezultă că $2\nmid 67,\ 3\nmid 67$ și $5\nmid 67$. Prin urmare, descompunerea în factori primi a numitorului fracției ce reprezintă pe r conține pe lângă factorii 2 și 5 și alte numere prime, ceea ce arată că r se transformă într-o fracție zecimală periodică mixtă.

24. **Fie $a,\ b,\ c$ trei numere naturale nenule invers proporționale cu $4,\ 5,\ 6$. Determinați $a+b+c$, știind că $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{5}{42}$.**

Soluție

Deoarece $4a=5b=6c$ și $a,\ b,\ c\in\mathbb{N}^*$, există $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $a=\frac{n}{4},\ b=\frac{n}{5},\ c=\frac{n}{6}$. Cum $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{5}{42}$, rezultă că $\frac{4}{n}+\frac{5}{n}+\frac{6}{n}>\frac{5}{42}$, ceea ce conduce la $\frac{15}{n}>\frac{5}{42}$, de unde $n<126$. Întrucât $a,\ b,\ c\in\mathbb{N}^*$, este necesar ca $4|n$, $5|n$ și $6|n$, ceea ce are loc dacă și numai dacă $n=60k$ și $k\in\mathbb{N}^*$. Ținând seama și de faptul că $n<126$, deducem că $n=60$ sau $n=120$.

Dacă $n=60$, atunci $a=15,\ b=12,\ c=10$, deci $a+b+c=37$.

Dacă $n=120$, atunci $a=30,\ b=24,\ c=20$, de unde $a+b+c=74$.

25. **Aflați $n\in\mathbb{N}^*$, știind că împărțirea lui 245 la n nu se face exact și că rezultatul acestei împărțiri cu aproximație de o sutime prin lipsă este $14,\ 41$.**

Soluție

Condiția impusă în enunț conduce la $14,41<\frac{245}{n}<14,42$. Deoarece $\frac{245}{n}>14,41$, rezultă că $n<\frac{24500}{1441}$, de unde $n<17,002$. Remarcând faptul că $\frac{245}{n}<14,42$, deducem că $n>\frac{24500}{1442}$, de unde $n>16,9$. Cum $n\in\mathbb{N}$, conchidem că $n=17$.

26. **Determinați valorile lui $x\in\mathbb{Q}$ pentru care numerele $a=\frac{2x+6}{x+2}$ și $b=\frac{2x+1}{3x+5}$ sunt simultan întregi.**

Soluție

Deoarece $a=2+\frac{2}{x+2}$, rezultă că $a\in\mathbb{Z}$ dacă și numai dacă $\frac{2}{x+2}\in\mathbb{Z}$, ceea ce

Scanned with OKEN Scanner

impune să existe $k \in \mathbb{Z}^*$ astfel încât $\frac{2}{x+2} = k$, de unde $x = \frac{2-2k}{k}$. Cum a și b trebuie să fie simultan numere întregi, rezultă că pentru aceste valori ale lui x și b trebuie să fie număr întreg. Dacă $x = \frac{2-2k}{k}$, atunci $b = \frac{3k-4}{k-6}$, ceea ce conduce la $b = 3 + \frac{14}{k-6}$. Deducem imediat că $b \in \mathbb{Z}$ atunci și numai atunci când $\frac{14}{k-6} \in \mathbb{Z}$. Întrucât $k-6 \in \mathbb{Z}$ (căci $k \in \mathbb{Z}$), ultima condiție este îndeplinită pentru $k-6 \in \{-14, -7, -2, -1, 1, 2, 7, 14\}$, ceea ce conduce la $k \in \{-8, -1, 4, 5, 7, 8, 13, 20\}$. Drept urmare, $x \in \left\{-\frac{9}{4}, -4, -\frac{3}{2}, -\frac{8}{5}, -\frac{12}{7}, -\frac{7}{4}, -\frac{24}{13}, -\frac{19}{10}\right\}$.

27. Fie $x \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ și $a = \frac{4x+3}{3x+2}$. Arătați că $a \in \mathbb{Q}_+ \setminus \mathbb{N}$.

Soluție

Dacă $x < 0$, atunci $x < -1$ (căci $x \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$), ceea ce implică $4x+3 < -1$ și $3x+2 < -1$, deci $a > 0$. Fie $x \geq 0$. În acest caz, $4x+3 \geq 3$ și $3x+2 \geq 2$, de unde $a > 0$. Prin urmare, $a > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$.

Dacă $3x+2 = 1$, atunci $x = -\frac{1}{3}$, iar dacă $3x+2 = -1$, atunci $x = -1$. Cum nici una din aceste situații nu convine, rezultă că $3x+2 \neq \pm 1$.

Fie $d \in \mathbb{Z}^*$ un divizor comun al numerelor $4x+3$ și $3x+2$. Atunci, $d \mid 4x+3-(3x+2) = 1$, ceea ce arată că $d = \pm 1$ și, deci, fracția $\frac{4x+3}{3x+2}$ este ireductibilă. În consecință, $a \notin \mathbb{Z}$ (oricare ar fi $x \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$).

Ca urmare a celor stabilite anterior, $a \in \mathbb{Q}_+ \setminus \mathbb{N}$.

28. Determinați numărul natural $\overline{abcd}$ cu proprietatea că fracția $\frac{\overline{abcd}}{\overline{ab} + \overline{cd}}$ ia cea mai mică valoare posibilă.

Soluție

Notând $\overline{ab} = x$ și $\overline{cd} = y$, fracția considerată devine $\frac{100x+y}{x+y}$. Deoarece $\frac{100x+y}{x+y} = \frac{x+y+99x}{x+y} = 1 + 99 \cdot \frac{x}{x+y} = 1 + 99 \cdot \frac{1}{1+\frac{y}{x}}$, rezultă că fracția inițială ia cea mai mică valoare posibilă atunci când $\frac{1}{1+\frac{y}{x}}$ ia cea mai mică valoare posibilă, ceea ce are loc dacă și numai dacă $\frac{y}{x}$ ia cea mai mare valoare posibilă. Având în vedere că x și y sunt numere naturale de două cifre, valoarea maximă a fracției $\frac{y}{x}$ este atinsă pentru $y = 99$ și $x = 10$. Ținând seama de cele stabilite anterior, numărul 1099 este soluția problemei.

29. Se scriu numerele raționale strict pozitive sub forma următorului șir : $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$. Al câtelea termen al șirului este $\frac{14}{50}$?

Soluție

Grupăm termenii șirului considerat astfel încât în fiecare grupă să intre acele

Scanned with OKEN Scanner

fracţii pentru care suma dintre numărător şi numitor este constantă. Astfel, prima grupă conţine $\frac{1}{1}$, a doua, $\frac{2}{1}$ şi $\frac{1}{2}$, a treia, $\frac{3}{1}$, $\frac{2}{2}$ şi $\frac{1}{3}$ ş.a.m.d. Întrucât termenul $\frac{14}{50}$ este în grupa pentru care suma dintre numărător şi numitor este 64, rezultă că până la această grupă sunt $1+2+3+\ \dots\ +62=(1+62)+(2+61)+\ \dots\ +(31+32)=\underbrace{63+63+\ \dots\ +63}_{31\text{ ori}}=63\cdot 61=1953$ de termeni ai şirului considerat. Remarcând şi faptul că termenul $\frac{14}{50}$ ocupă, în grupa din care face parte, locul 50, deducem că în şirul considerat respectivul termen ocupă locul $1953+50=2003$.

30. Fie $n\in\mathbb{N}$ şi numerele $a=\frac{(-1)^n}{4}+\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$, $b=\frac{2+(-1)^n}{4}$. Arătaţi că, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, $a+b=1$ şi $16ab=3$.

Soluţie

Dacă n este număr natural par, atunci $a=\frac{1}{4}$, iar $b=\frac{3}{4}$, ceea ce arată că, în cazul considerat, $a+b=1$ şi $16ab=3$.

Dacă n este număr natural impar, atunci $a=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$, iar $b=\frac{1}{4}$. Deci, şi în acest caz, $a+b=1$ şi $16ab=3$. Astfel, cerinţa problemei este îndeplinită.

31. Determinaţi $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $(-2)^3+(-1)^n-(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2}=-9\frac{1}{2}$.

Soluţie

Deoarece $(-2)^3+(-1)^n-(-1)^{n+1}\frac{1}{2}=-9\frac{1}{2}\Leftrightarrow 9\frac{1}{2}-8+(-1)^n+(-1)^{n+2}\cdot\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow\frac{3}{2}+(-1)^n+$ $+(-1)^n\cdot\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow\frac{3}{2}+(-1)^n\cdot\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow\frac{3}{2}[1+(-1)^n]=0$, rezultă că egalitatea din enunţ are loc dacă şi numai dacă n este număr natural impar.

32. Fie $n\in\mathbb{N}$ şi $a=(-1)^n\frac{2}{3}+(-1)^{n+1}\frac{3}{4}+(-1)^{n+2}\frac{5}{6}$. Arătaţi că, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, $|a|=\frac{3}{4}$.

Soluţie

Dacă n este număr natural impar, atunci $a=-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}=-\frac{3}{4}$, iar dacă n este număr natural par, atunci $a=\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{3}{4}$. Deci, $|a|=\frac{3}{4}$.

33. Fie k, m, $n\in\mathbb{N}$ şi $a=(-1)^k\frac{2}{3}+(-1)^m\frac{3}{4}+(-1)^n\frac{5}{6}$. Arătaţi că, dacă $k+m+n$ este număr par, atunci $-\frac{11}{12}\le a\le\frac{9}{4}$.

Soluţie

Numărul $k+m+n$ este par dacă şi numai dacă toate numerele k, m şi n sunt pare sau dacă două dintre ele sunt impare, iar al treilea este par. Întrucât $\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\frac{5}{6}$, rezultă că, dacă $k+m+n$ este număr par, a ia cea mai mică valoare posibilă atunci când k este număr par, iar m şi n sunt numere impare. Drept urmare, $a\ge\frac{2}{3}-\frac{3}{4}-\frac{5}{6}=-\frac{11}{12}$. Remarcând faptul că a ia cea mai

Scanned with OKEN Scanner

mare valoare posibilă atunci când k, m și n sunt numere pare, deducem că $a \le \frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{9}{4}$.

34. Fie $k,\ m,\ n \in \mathbb{N}$ și $a=(-1)^k\frac{1}{2}+(-1)^m\frac{1}{3}+(-1)^n\frac{1}{6}$. **Arătați că $a \in \mathbb{Z}$ dacă și numai dacă $m+n$ este număr par.**

Soluție

Evident, $a=\frac{(-1)^k 3+(-1)^m 2+(-1)^n}{6}$.

Dacă $m+n$ este număr par, atunci fie m și n sunt numere impare, fie m și n sunt numere pare, ceea ce arată că $(-1)^m 2+(-1)^n \in \{-3, 3\}$. Rezultă că $(-1)^k 3+(-1)^m 2+(-1)^n \in \{-6, 0, 6\}$, de unde $a \in \{-1, 0, 1\}$. Deci, în cazul considerat, $a \in \mathbb{Z}$.

Rămâne să arătăm că, dacă $m+n$ este număr impar, atunci $a \notin \mathbb{Z}$. Într-adevăr, dacă $m+n$ este număr impar, atunci $(-1)^m 2+(-1)^n \in \{-1, 1\}$, de unde $(-1)^k 3+(-1)^m 2+(-1)^n \in \{-4, -2, 2, 4\}$. Rezultă că $a \in \left\{-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$ și, deci, $a \notin \mathbb{Z}$.

35. Fie $a=-\frac{8^{93}}{3^{104}}$ și $b=-\frac{9^{92}}{2^{153}}$. **Arătați că $a > b$.**

Soluție

Deoarece $\frac{a}{b}=\frac{8^{93}}{3^{104}}\cdot\frac{2^{153}}{9^{92}}=\frac{2^{279}\cdot 2^{153}}{3^{104}\cdot 3^{184}}=\frac{2^{432}}{3^{288}}=\frac{2^{3\cdot 144}}{3^{2\cdot 144}}=\frac{8^{144}}{9^{144}}=\left(\frac{8}{9}\right)^{144}$, iar $\frac{8}{9}<1$, rezultă că $\frac{a}{b}<1$. Înmulțind ambii membri ai acestei inegalități cu b, obținem $a>b$ (căci $b<0$).

PROBLEME PROPUSE

1. Arătați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, fracția $\frac{2n+1}{n^2+n}$ este ireductibilă.

2. Arătați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, fracția $\frac{n^2-3n+4}{n^2+n+6}$ se simplifică cu 2.

3. Arătați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, fracția $\frac{2n+3}{3n+2}$ este fie ireductibilă, fie se simplifică cu 5.

4. Fie $a,\ b \in \mathbb{Z}$. Arătați că cel puțin unul dintre numerele $\frac{a}{3}$, $\frac{b}{3}$, $\frac{a-b}{3}$, $\frac{a+b}{3}$ este întreg.

5. Fie $x,\ y \in \mathbb{Z}^*$ și s suma tuturor fracțiilor $\frac{x}{y}$ cu proprietatea că $|x| \le 5$ și $y=7$. Arătați că $s=0$.

6. Fie $a=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ \dots\ +\frac{1}{99\cdot 101}$. Arătați că $a=\frac{50}{101}$.

Scanned with OKEN Scanner

7. Fie $a=\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{7}{2\cdot 3}+\frac{13}{3\cdot 4}+\ \ldots\ +\frac{91}{9\cdot 10}$. Arătați că $a=9\frac{9}{10}$.

8. Fie $a=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{6}+\ \ldots\ +\frac{101}{100}$ și $b=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ \ldots\ +\frac{1}{100}$. Arătați că $a-b=50$.

9. Fie $a=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \ldots\ +\frac{1}{50}$ și $b=3+\frac{5}{2}+\frac{7}{3}+\ \ldots\ \frac{101}{50}$. Arătați că $a-b=-100$.

10. Fie $n\in\mathbb{N}$ și $a=\frac{5}{9}+\frac{4\cdot 10^{n+1}}{9}$. Arătați că $a\in\mathbb{N}^*$.

11. Arătați că diferența dintre un număr natural și o fracție ireductibilă este o fracție ireductibilă.

12. Fie $S_1=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ \ldots\ +\frac{1}{n(n+1)}$, $S_2=2+4+6+\ \ldots\ +2n$ și $S_3=1+3+5+\ \ldots\ +(2n-1)$. Arătați că $S_1\cdot S_2=S_3$.

13. Fie $n\in\mathbb{N}^*$. Scrieți în ordine crescătoare numerele raționale: $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n+1}$, $\frac{3}{n+2}$, $\ldots$, $\frac{10}{n+9}$.

14. Fie $a=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ \ldots\ +\frac{1}{198}-\frac{1}{200}$ și $b=-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\ \ldots\ +-\frac{1}{297}+\frac{1}{300}$. Arătați că $2a+3b=0$.

15. Fie $a=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ \ldots\ \cdot\left(1+\frac{1}{9}\right)$ și $b=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ \ldots\ \cdot\left(1-\frac{1}{10}\right)$. Calculați $a-10b$ și $2ab$.

16. Fie $a=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot\ \ldots\ \cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)$ și $b=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\cdot\ \ldots\ \cdot\left(1-\frac{1}{99}\right)$. Arătați că $100ab=1$.

17. Fie $a=\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{5}-\frac{5}{4}\right)\left(-4\frac{4}{7}\right)$. Arătați că $a=1$.

18. Fie $a=\frac{1,(2)+1}{1,(2)-1}+\frac{1,3(2)+1}{1,3(2)-1}-1\frac{6}{29}$. Arătați că $a\in\mathbb{N}$.

19. Determinați cifrele a și b, știind că $\overline{0,a(b)}+\overline{0,b(a)}=0,(3)$.

20. Determinați valorile lui $x\in\mathbb{Q}^*$ pentru care $\frac{4|x|-1}{|x|}\in\mathbb{N}$.

21. Fie $a,\ b\in\mathbb{Z}^*$. Arătați că, dacă $\frac{a}{b}=\frac{12}{13}$, atunci $r=\frac{a-3b}{a+4b}$ este cubul unui număr rațional.

22. Fie $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{N}^*$ și numărul rațional $r=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$. Arătați că, dacă $a,\ b,\ c,\ d$ sunt direct proporționale cu 2, 4, 6, 7, atunci r se transformă într-o fracție zecimală periodică mixtă.

Scanned with OKEN Scanner

23. Fie $a,\ b,\ c \in \mathbb{N}^*$ şi $A = \dfrac{(4a+5b)(4b+5c)(4c+5a)}{(2a+b)(2b+c)(2c+a)}$. Arătaţi că, dacă $4a+5b$, $4b+5c$, $4c+5a$ sunt direct proporţionale cu $2b+c$, $2c+a$, $2a+b$, atunci A este cubul unui număr natural.

24. Determinaţi valorile lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care partea întreagă a numărului raţional $\dfrac{32}{3n+4}$ este 2.

25. Determinaţi $n \in \mathbb{N}^*$, ştiind că împărţirea numărului 435 la n nu se face exact, iar rezultatul acestei împărţiri cu aproximaţie de o sutime prin adaos este $11{,}16$.

26. Determinaţi numerele $x \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $-\dfrac{14}{15} < \dfrac{x}{12} < -\dfrac{3}{5}$.

27. Fie $a,\ b \in \mathbb{Q}$ astfel încât $a < b$ şi $m,\ n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că $a < \dfrac{ma+nb}{m+n} < b$.

28. Fie $a,\ b,\ c \in \mathbb{Q}$. Arătaţi că, dacă $a < b < c$, atunci $a < \dfrac{a+b+c}{3} < c$.

29. Fie $a = (2^{-3})^5 + \left[\left(-\dfrac{1}{2}\right)^5\right]^3 + (-8)^{-4} + \left(-\dfrac{1}{16}\right)^3$. Arătaţi că $a = 0$.

30. Fie $m,\ n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că, dacă $m+n$ este număr par, atunci $\dfrac{(-1)^m + (-1)^n + (-1)^{m+n}}{(-1)^m - (-1)^n + (-1)^{mn}} \in \mathbb{N}$.

31. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi numărul raţional $a = \dfrac{\left[(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \ldots + (-1)^n\right]n}{(-1)^n + (-1)^{3n} + (-1)^{5n} + \ldots + (-1)^{(2n-1)n}}$. Arătaţi că $a \in \{0,\ 1\}$.

32. Fie $n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că

$$(-1)^n \frac{57}{95} + (-1)^{n+1} \frac{85}{119} + (-1)^{n+2} \frac{91}{143} + (-1)^{n+3} \frac{161}{253} + (-1)^{n+4} \frac{145}{203} + (-1)^{n+5} \frac{93}{155} = 0.$$

33. Fie $a = (-1)^1 \dfrac{1}{2} + (-1)^2 \dfrac{2}{3} + (-1)^3 \dfrac{3}{4} + (-1)^4 \dfrac{1}{2} + (-1)^5 \dfrac{2}{3} + (-1)^6 \dfrac{3}{4} + \ldots + (-1)^{97} \dfrac{1}{2} + (-1)^{98} \dfrac{2}{3} + (-1)^{99} \dfrac{3}{4} + (-1)^{100} \dfrac{1}{2}$. Arătaţi că $a = -\dfrac{1}{12}$.

O.M., etapa judeţeană, Iaşi, 1995

34. Fie $m,\ n \in \mathbb{N}$ şi $a = (-1)^m \dfrac{1}{2} + (-1)^{n+1} \dfrac{1}{3} + (-1)^{m+n+1} \dfrac{1}{6}$. Arătaţi că $a \leq 1$.

35. Fie $k,\ m,\ n \in \mathbb{N}$ astfel încât $k+m+n$ să fie număr impar şi $a = (-1)^k \dfrac{2}{3} + (-1)^{m+1} \dfrac{3}{4} + (-1)^{n+2} \dfrac{5}{6}$. Arătaţi că $-\dfrac{11}{12} \leq a \leq \dfrac{9}{4}$.

36. Fie $k,\ m,\ n \in \mathbb{N}$ şi $a = (-1)^k \dfrac{1}{2} + (-1)^m \dfrac{1}{8} + (-1)^n \dfrac{3}{8}$. Arătaţi că $a \in \mathbb{Z}$ dacă şi numai dacă $m+n$ este număr par.

37. Comparaţi numerele $a = -\dfrac{8^{72}}{3^{102}}$ şi $b = -\dfrac{9^{73}}{2^{156}}$.

RĂSPUNSURI

13. Dacă $n = 1$, atunci numerele sunt egale, iar dacă $n \geq 2$, atunci $\dfrac{1}{n} < \dfrac{2}{n+1} < \dfrac{3}{n+2} < \ldots < \dfrac{10}{n+9}$

15. $a - 10b = 4$ şi $2ab = 1$ **19.** $a = 1,\ b = 2$ sau $a = 2,\ b = 1$ **20.** $x \in \left\{-1,\ -\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2},\ 1\right\}$

24. $n \in \{3,\ 4\}$ **25.** $n = 39$ **26.** $x \in \{-11,\ -10,\ -9,\ -8\}$ **37.** $a > b$.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL II

NUMERE REALE

PROBLEME REZOLVATE

1. **Determinați cifrele a și b pentru care $\sqrt{\overline{1ab}} \in \mathbb{N}$.**

Soluție

Evident, $\sqrt{\overline{1ab}} \in \mathbb{N}$ dacă și numai dacă numărul $\overline{1ab}$ este pătrat perfect. Deoarece $10^2 = 100$, $11^2 = 121$, $12^2 = 144$, $13^2 = 169$, $14^2 = 196$, rezultă că $a = b = 0$, sau $a = 2$ și $b = 1$, sau $a = b = 4$, sau $a = 6$ și $b = 9$, sau $a = 9$ și $b = 6$.

2. **Arătați că, dacă $a \in \mathbb{N}$ și $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbb{N}$.**

Soluție

Deoarece $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, există $m, n \in \mathbb{N}$ și $n \neq 0$ astfel încât $\sqrt{a} = \frac{m}{n}$. Atunci, $\frac{m^2}{n^2} = a$. Cum $a \in \mathbb{N}$, rezultă că $n^2 | m^2$, de unde $n | m$. Drept urmare, $\frac{m}{n} \in \mathbb{N}$, ceea ce este totuna cu $\sqrt{a} \in \mathbb{N}$.

3. **Determinați cifrele a și b pentru care $\sqrt{\overline{2,ab}} \in \mathbb{Q}$.**

Soluție

Întrucât $\sqrt{\overline{2,ab}} = \sqrt{\frac{\overline{2ab}}{100}} = \frac{\sqrt{\overline{2ab}}}{10}$, condiția din enunț este îndeplinită dacă și numai dacă $\sqrt{\overline{2ab}} \in \mathbb{Q}$. Ținând seama și de faptul că $\overline{2ab} \in \mathbb{N}$, deducem că $\sqrt{\overline{2ab}} \in \mathbb{N}$, ceea ce are loc atunci și numai atunci când $\overline{2ab}$ este pătrat perfect. Cum $15^2 = 225$, $16^2 = 256$ și $17^2 = 289$ (evident, $14^2 < 200$ și $18^2 > 299$), condiția anterioară este îndeplinită dacă și numai dacă $a = 2$ și $b = 5$, sau $a = 5$ și $b = 6$, sau $a = 8$ și $b = 9$.

4. **Fie $a = 1 + 3 + 5 + \ldots + 101$. Calculați $\sqrt{a}$.**

Soluție

Deoarece $a = (1 + 101) + (3 + 99) + \ldots + (49 + 53) + 51 = \underbrace{102 + 102 + \ldots + 102}_{\text{25 de termeni}} + 51 = 102 \cdot 25 + 51 = 2601$, rezultă că $\sqrt{a} = \sqrt{2601} = 51$.

5. **Fie $a = \frac{6}{5} + \frac{7}{10} + \frac{8}{15} + \ldots + \frac{50}{225} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{45}\right)$. Calculați $\sqrt{a}$.**

Soluție

Pentru început, remarcăm faptul că $6 = 5 + 1$ și $5 = 5 \cdot 1$, $7 = 5 + 2$ și $10 = 5 \cdot 2$, ..., $50 =$

$=5+45$ şi $225=5\cdot 45$). Această observaţie ne sugerează cum trebuie să procedăm pentru aflarea lui a, şi anume :
$a=\left(\frac{6}{5}-1\right)+\left(\frac{7}{10}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{8}{15}-\frac{1}{3}\right)+\ \ldots\ +\left(\frac{50}{225}-\frac{1}{45}\right)=\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\ \ldots\ +\frac{1}{5}}_{45\text{ de termeni}}=\frac{1}{5}\cdot 45=9$. Prin urmare, $\sqrt{a}=3$.

6. **Fie** $a=\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{18}+\ \ldots\ +\sqrt{200}$ **şi** $b=\sqrt{3}+\sqrt{12}+\sqrt{27}+\ \ldots\ +\sqrt{300}$. **Arătaţi că** $a\sqrt{3}=b\sqrt{2}$.

Soluţie

Întrucât $a=\sqrt{2}+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+\ \ldots\ +10\sqrt{2}=(1+2+3+\ \ldots\ +10)\sqrt{2}=55\sqrt{2}$, rezultă că $a\sqrt{3}=55\sqrt{6}$. Pe de altă parte, $b=\sqrt{3}+2\sqrt{3}+3\sqrt{3}+\ \ldots\ +10\sqrt{3}=$ $=(1+2+3+\ \ldots\ +10)\sqrt{3}=55\sqrt{3}$, de unde $b\sqrt{2}=55\sqrt{6}$. Ca urmare a celor stabilite anterior, cerinţa enunţului a fost îndeplinită.

7. **Fie** $a=(2\sqrt{3}-3\sqrt{12}+4\sqrt{27}-5\sqrt{48}+6\sqrt{75})\sqrt{2}$ **şi** $b=5\sqrt{6}-6\sqrt{24}+7\sqrt{54}-8\sqrt{96}+9\sqrt{150}$. **Calculaţi media geometrică a numerelor** a **şi** b.

Soluţie

Deoarece
$a=(2\sqrt{3}-3\sqrt{4\cdot 3}+4\sqrt{9\cdot 3}-5\sqrt{16\cdot 3}+6\sqrt{25\cdot 3})\sqrt{2}=(2\sqrt{3}-6\sqrt{3}+12\sqrt{3}-20\sqrt{3}+30\sqrt{3})\sqrt{2}=$
$=18\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=18\sqrt{6}$, iar $b=5\sqrt{6}-6\sqrt{4\cdot 6}+7\sqrt{9\cdot 6}-8\sqrt{16\cdot 6}+9\sqrt{25\cdot 6}=5\sqrt{6}-12\sqrt{6}+21\sqrt{6}-$
$-32\sqrt{6}+45\sqrt{6}=27\sqrt{6}$, rezultă că media geometrică a numerelor a şi b este $\sqrt{(18\sqrt{6})(27\sqrt{6})}$. Cum $(18\sqrt{6})(27\sqrt{6})=18\cdot 27\cdot 6=2^2\cdot 3^6=(2\cdot 3^3)^2=54^2$, numărul căutat este 54.

8. **Fie** $a=\sqrt{2}+\sqrt{2^2}+\sqrt{2^3}+\sqrt{2^4}+\ \ldots\ +\sqrt{2^{100}}$. **Arătaţi că** $a=(2^{50}-1)(2+\sqrt{2})$.

Soluţie

Evident,
$a=\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+2^2+\ \ldots\ +2^{49}\sqrt{2}+2^{50}=(2+2^2+2^3+\ \ldots\ +2^{50})+(\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2^2\sqrt{2}+\ \ldots\ +2^{49}\sqrt{2})=$
$=2(1+2+2^2+\ \ldots\ +2^{49})+\sqrt{2}(1+2+2^2+\ \ldots\ +2^{49})=(1+2+2^2+\ \ldots\ +2^{49})(2+\sqrt{2})$.
Fie $s=1+2+2^2+\ \ldots\ +2^{49}$. Atunci, $2s=2+2^2+2^3+\ \ldots\ +2^{49}+2^{50}=s-1+2^{50}$, de unde $s=2^{50}-1$. Drept urmare, $a=(2^{50}-1)(2+\sqrt{2})$.

9. **determinaţi numerele reale** x, y, z, **ştiind că acestea sunt direct proporţionale cu** $\sqrt{12}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{48}$ **şi că** $x+y-z=6$.

Soluţie

Ţinând seama atât de enunţ, cât şi de faptul că $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, $\sqrt{27}=3\sqrt{3}$, $\sqrt{48}=4\sqrt{3}$, deducem că $\frac{x}{2\sqrt{3}}=\frac{y}{3\sqrt{3}}=\frac{z}{4\sqrt{3}}$. Atunci, există $k\in\mathbb{R}$ astfel încât $x=2\sqrt{3}k$, $y=3\sqrt{3}k$, $z=4\sqrt{3}k$. Cum $x+y-z=6$, rezultă că $2\sqrt{3}k+3\sqrt{3}k-4\sqrt{3}k=6$, de unde $k=2\sqrt{3}$. Prin urmare, $x=12$, $y=18$ şi $z=24$.

10. **Determinaţi valorile lui** $x\in\mathbb{N}$ **pentru care** $\frac{\sqrt{720}}{\sqrt{x+1}}\in\mathbb{N}$.

Soluţie

Întrucât $\sqrt{720}=12\sqrt{5}=2^2\cdot 3\sqrt{5}$, condiţia $\frac{\sqrt{720}}{\sqrt{x+1}}\in\mathbb{N}$ este îndeplinită dacă şi numai dacă $\sqrt{x+1}=\sqrt{5}$ sau $\sqrt{x+1}=2\sqrt{5}$ sau $\sqrt{x+1}=3\sqrt{5}$ sau $\sqrt{x+1}=4\sqrt{5}$ sau $\sqrt{x+1}=6\sqrt{5}$ sau $\sqrt{x+1}=12\sqrt{5}$, egalităţi ce conduc la $x\in\{4, 19, 44, 79, 179, 719\}$.

Scanned with OKEN Scanner

11. **Fie** $a=\dfrac{6-2\sqrt{3}+2\sqrt{5}-2\sqrt{15}}{1-2\sqrt{3}+\sqrt{5}}$. **Arătați că** $a=1+\sqrt{5}$.

Soluție

Deoarece $6-2\sqrt{3}+2\sqrt{5}-2\sqrt{15}=1-2\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{5}-2\sqrt{15}+5=(1-2\sqrt{3}+\sqrt{5})+(\sqrt{5}-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\sqrt{5}\sqrt{5})=$ $=(1-2\sqrt{3}+\sqrt{5})+\sqrt{5}(1-2\sqrt{3}+\sqrt{5})=(1-2\sqrt{3}+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})$, rezultă că $a=1+\sqrt{5}$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

12. **Fie** $a=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+\ \ldots\ +\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{7}}{\sqrt{56}}+\dfrac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{\sqrt{72}}$ **și** $b=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}+$ $+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{35}}+\ \ldots\ +\dfrac{\sqrt{23}-\sqrt{21}}{\sqrt{483}}+\dfrac{\sqrt{25}-\sqrt{23}}{\sqrt{575}}$. **Arătați că** $15ab\in\mathbb{N}$.

Soluție

Întrucât $a=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{4}}+\ \ldots\ +\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{7}}{\sqrt{7}\sqrt{8}}+\dfrac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{\sqrt{8}\sqrt{9}}=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+$ $+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\ \ldots\ +\dfrac{1}{\sqrt{7}}-\dfrac{1}{\sqrt{8}}+\dfrac{1}{\sqrt{8}}-\dfrac{1}{\sqrt{9}}=1-\dfrac{1}{\sqrt{9}}=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$, iar $b=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{5}}+$ $+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{7}}+\ \ldots\ +\dfrac{\sqrt{23}-\sqrt{21}}{\sqrt{21}\sqrt{23}}+\dfrac{\sqrt{25}-\sqrt{23}}{\sqrt{23}\sqrt{25}}=1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{7}}+\ \ldots\ +\dfrac{1}{\sqrt{21}}-\dfrac{1}{\sqrt{23}}+$ $+\dfrac{1}{\sqrt{23}}-\dfrac{1}{\sqrt{25}}=1-\dfrac{1}{\sqrt{25}}=1-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$, rezultă că $15ab=8$. Deci, $15ab\in\mathbb{N}$.

13. **a) Fie** $a=2\sqrt{2\dfrac{1}{4}}+3\sqrt{7\dfrac{1}{9}}+4\sqrt{14\dfrac{1}{16}}+5\sqrt{23\dfrac{1}{25}}$. **Arătați că** $\sqrt{2a}\in\mathbb{N}$.

b) Fie $a=\sqrt{1\dfrac{1}{8}}+\sqrt{3\dfrac{1}{8}}+\sqrt{6\dfrac{1}{8}}+\sqrt{10\dfrac{1}{8}}+\sqrt{15\dfrac{1}{8}}+\sqrt{21\dfrac{1}{8}}$. **Demonstrați că** $\sqrt{a\sqrt{2}+1}\in\mathbb{N}$.

Soluție

a) Deoarece $a=2\sqrt{\dfrac{9}{4}}+3\sqrt{\dfrac{64}{9}}+4\sqrt{\dfrac{225}{16}}+5\sqrt{\dfrac{576}{25}}=2\cdot\dfrac{3}{2}+3\cdot\dfrac{8}{3}+4\cdot\dfrac{15}{4}+5\cdot\dfrac{24}{5}=3+8+15+24=50$, rezultă că $\sqrt{2a}=\sqrt{100}=10$. Cum $10\in\mathbb{N}$, cerința enunțului a fost îndeplinită.

b) Remarcând faptul că $a=\sqrt{\dfrac{9}{8}}+\sqrt{\dfrac{25}{8}}+\sqrt{\dfrac{49}{8}}+\sqrt{\dfrac{81}{8}}+\sqrt{\dfrac{121}{8}}+\sqrt{\dfrac{169}{8}}=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}+\dfrac{5}{2\sqrt{2}}+\dfrac{7}{2\sqrt{2}}+$ $+\dfrac{9}{2\sqrt{2}}+\dfrac{11}{2\sqrt{2}}+\dfrac{13}{2\sqrt{2}}=\dfrac{24}{\sqrt{2}}$, deducem că $a\sqrt{2}+1=25$, de unde $\sqrt{a\sqrt{2}+1}=5\in\mathbb{N}$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

14. **Fie** $a=\sqrt{54{,}76}-\sqrt{67{,}24}-\sqrt{110{,}25}+\sqrt{151{,}29}$. **Arătați că** $a\in\mathbb{N}$.

Soluție

Întrucât $\sqrt{54{,}76}=7{,}4$, $\sqrt{67{,}24}=8{,}2$, $\sqrt{110{,}25}=10{,}5$ și $\sqrt{151{,}29}=12{,}3$, rezultă că $a=1$. Cum $1\in\mathbb{N}$, cerința enunțului a fost îndeplinită.

15. **Determinați** $x\in\mathbb{Q}_+$, **știind că** $\dfrac{3\sqrt{x+1}}{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}=\dfrac{\sqrt{2\dfrac{7}{81}}+\sqrt{2\dfrac{34}{81}}}{\sqrt{4{,}9284}-\sqrt{0{,}0484}}$.

Soluție

Deoarece $(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2=18-12=6$, $\sqrt{2\dfrac{7}{81}}+\sqrt{2\dfrac{34}{81}}=\sqrt{\dfrac{169}{81}}+\sqrt{\dfrac{196}{81}}=\dfrac{13}{9}+\dfrac{14}{9}=3$ și $\sqrt{4{,}9284}-\sqrt{0{,}0484}=2{,}22-0{,}22=2$, egalitatea din enunț conduce la $\dfrac{3\sqrt{x+1}}{6}=\dfrac{3}{2}$,

Scanned with OKEN Scanner

de unde $\sqrt{x+1}=3$ şi, deci, $x=8$.

16. Determinaţi cel mai mic număr natural nenul n cu proprietatea că $\sqrt{2\sqrt{3n}}\in\mathbb{N}$.

Soluţie

Întrucât $\sqrt{2\sqrt{3n}}=\sqrt{\sqrt{2^2\cdot 3n}}$, condiţia din enunţ este îndeplinită dacă şi numai dacă $\sqrt{2^2 3n}$ este pătrat perfect. Ţinând seama şi de faptul că n trebuie să fie cel mai mic posibil, deducem că $n=2^2\cdot 3^3=108$.

17. Exprimaţi numerele naturale de la 0 la 12 prin trei cifre de 8 legate între ele prin semne de operaţie ale algebrei. Menţionăm faptul că într-o singură situaţie puteţi folosi şi cifra 0.

Soluţie

Având în vedere cele ce urmează : $8(8-8)=0$, $\sqrt{8\cdot 8}:8=1$, $(8+8):8=2$, $\sqrt{8+8:8}=3$, $8-\sqrt{8+8}=4$, $8^0+\sqrt{8+8}=5$, $8-\sqrt{8+8}=6$, $8-8:8=7$, $8+8-8=8$, $8+8:8=9$, $8+\sqrt{8+8}=10$, $88:8=11$, $8+\sqrt{8+8}=12$, cerinţa enunţului a fost îndeplinită.

18. Aflaţi fracţia echivalentă cu $\frac{5}{7}$, ştiind că termenii ei sunt pozitivi, iar produsul acestora este 40460.

Soluţie

Evident, fracţia căutată este de forma $\frac{5n}{7n}$, cu $n\in\mathbb{N}^*$. Întrucât produsul termenilor acestei fracţii este $35n^2$, rezultă că $35n^2=40460$, ceea ce conduce la $n^2=1156$, de unde $n=\sqrt{1156}=34$. Drept urmare, $\frac{170}{238}$ este soluţia problemei.

19. Aflaţi trei numere raţionale pozitive, ştiind că primul este $\frac{3}{11}$ din al doilea, că al doilea este $\frac{3}{11}$ din al treilea şi că produsul dintre cel mai mic şi cel mai mare dintre ele este 4356.

Soluţie

Fie $x\in\mathbb{Q}$ cel de al treilea dintre numerele considerate. Atunci, al doilea este $\frac{3x}{11}$, iar primul, $\frac{9x}{121}$. Având în vedere că cel mai mic dintre ele este $\frac{9x}{121}$, iar cel mai mare, x (căci $\frac{9}{121}<\frac{3}{11}<1$ şi $x>0$) şi că produsul lor este 4356, deducem că $\frac{9x^2}{121}=4356$, ceea ce conduce la $x^2=121\cdot 484$, de unde $x=\sqrt{121\cdot 484}=\sqrt{121}\cdot\sqrt{484}=11\cdot 22=242$. Prin urmare, numerele căutate sunt : 18, 66 şi 242.

20. Aflaţi fracţiile având termenii numere naturale, echivalente cu fracţia $\frac{12}{13}$, ştiind că pentru fiecare dintre ele diferenţa dintre pătratul numitorului şi pătratul numărătorului este un număr natural de trei cifre.

Soluţie

Fracţiile echivalente cu $\frac{12}{13}$ sunt de forma $\frac{12n}{13n}$, cu $n\in\mathbb{N}^*$. Ţinând seama de enunţ, deducem că $100\le(13n)^2-(12n)^2<1000$, de unde $100\le 25n^2<1000$, ceea ce conduce la $4\le n^2<40$. Rezultă că $2\le n<\sqrt{40}$. Cum $\sqrt{40}=6{,}3\ldots$ şi $n\in\mathbb{N}$, rezultă că $n\in\{2,3,4,5,6\}$. Drept urmare, fracţiile căutate sunt :

$$\frac{24}{26},\ \frac{36}{39},\ \frac{48}{52},\ \frac{60}{65}\ \text{şi}\ \frac{72}{78}.$$

Scanned with OKEN Scanner

21. **Determinați** $\sqrt{b(a+c+1)}$, **știind că** a, b **și** c **sunt numere naturale consecutive și că** $a < 2\sqrt{3} < b < 3\sqrt{2} < c$.

Soluție

Deoarece $1{,}73 < \sqrt{3}$ și $\sqrt{2} < 1{,}42$, rezultă că $3{,}46 < 2\sqrt{3}$ și $3\sqrt{2} < 4{,}26$. Având în vedere că $2\sqrt{3} < b < 3\sqrt{2}$, deducem că $3{,}42 < b < 4{,}26$, ceea ce, împreună cu $b \in \mathbf{N}$, arată că $b = 4$. Remarcând și faptul că a, b și c sunt numere naturale consecutive, conchidem că $a = 3$ și $c = 5$. Prin urmare, $\sqrt{b(a+c+1)} = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$.

22. **Arătați că** $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{6} < 8$.

Soluție

Întrucât $\sqrt{2} < 1{,}42$, $\sqrt{3} < 1{,}74$, $\sqrt{5} < 2{,}24$ și $\sqrt{6} < 2{,}45$, iar $1{,}42 + 1{,}74 + 2{,}24 + 2{,}45 = 7{,}85 < 8$, rezultă că $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{6} < 8$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

23. **Arătați că** $\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{6+\sqrt{6}} + \sqrt{12+\sqrt{12}} < 9$.

Soluție

Deoarece $\sqrt{2} < 2$, rezultă că $2 + \sqrt{2} < 4$, de unde $\sqrt{2+\sqrt{2}} < 2$. Remarcând că $\sqrt{6} < 3$, deducem că $6 + \sqrt{6} < 9$, ceea ce implică $\sqrt{6+\sqrt{6}} < 3$. Întrucât $\sqrt{12} < 4$, rezultă că $12 + \sqrt{12} < 16$, de unde $\sqrt{12+\sqrt{12}} < 4$. Drept urmare, $\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{6+\sqrt{6}} + \sqrt{12+\sqrt{12}} < 9$.

24. **Arătați că** $\dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} + \dfrac{1}{\sqrt{6-\sqrt{6}}} > \dfrac{3}{2}$.

Soluție

Întrucât $1 < \sqrt{2} < 2$, rezultă că $0 < 2 - \sqrt{2} < 1$, ceea ce implică $0 < \sqrt{2-\sqrt{2}} < 1$, de unde $\dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} > 1$. Remarcând faptul că $2 < \sqrt{6} < 3$, deducem că $0 < 6 - \sqrt{6} < 4$, ceea ce conduce la $0 < \sqrt{6-\sqrt{6}} < 2$, de unde $\dfrac{1}{\sqrt{6-\sqrt{6}}} > \dfrac{1}{2}$. În consecință, $\dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} + \dfrac{1}{\sqrt{6-\sqrt{6}}} > 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

25. **Fie** $x \in \mathbb{R}$ **astfel încât** $0 \leq x \leq 384$ **și** $a = \sqrt{x+100} + \sqrt{x+400}$. **Arătați că** $30 \leq a \leq 50$.

Soluție

Deoarece $x \geq 0$, rezultă că $x + 100 \geq 100$ și $x + 400 \geq 400$, ceea ce implică $\sqrt{x+100} \geq 10$ și $\sqrt{x+400} \geq 20$, de unde $\sqrt{x+100} + \sqrt{x+400} \geq 30$, deci $a \geq 30$. Având în vedere că $x \leq 384$, deducem că $x + 100 \leq 484$ și $x + 400 \leq 784$, ceea ce conduce la $\sqrt{x+100} \leq 22$ și $\sqrt{x+400} \leq 28$, de unde $\sqrt{x+100} + \sqrt{x+400} \leq 50$. Drept urmare, $a \leq 50$. Cele stabilite anterior arată că cerința enunțului a fost îndeplinită.

26. **Fie** $a = \dfrac{\sqrt{2}}{3} + \dfrac{\sqrt{6}}{5} + \dfrac{\sqrt{12}}{7} + \dfrac{\sqrt{20}}{9} + \dfrac{\sqrt{30}}{11} + \dfrac{\sqrt{42}}{13} + \dfrac{\sqrt{56}}{15} + \dfrac{\sqrt{72}}{17} + \dfrac{\sqrt{90}}{19} + \dfrac{\sqrt{110}}{21}$. **Arătați că** $a < 5$.

Soluție

Fie $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ și $x \neq y$. Atunci, $\sqrt{xy} < \dfrac{x+y}{2}$, ceea ce implică $\dfrac{\sqrt{xy}}{x+y} < \dfrac{1}{2}$. Remarcând

Scanned with OKEN Scanner

faptul că $a=\frac{\sqrt{1\cdot 2}}{1+2}+\frac{\sqrt{2\cdot 3}}{2+3}+\frac{\sqrt{3\cdot 4}}{3+4}+\frac{\sqrt{4\cdot 5}}{4+5}+\frac{\sqrt{5\cdot 6}}{5+6}+\frac{\sqrt{6\cdot 7}}{6+7}+\frac{\sqrt{7\cdot 8}}{7+8}+\frac{\sqrt{8\cdot 9}}{8+9}+\frac{\sqrt{9\cdot 10}}{9+10}+\frac{\sqrt{10\cdot 11}}{10+11}$ şi că fiecare termen al acestei sume este mai mic decât $\frac{1}{2}$, deducem că $a<\frac{1}{2}\cdot 10$, ceea ce conduce la $a<5$.

27. Fie $x,\ y\in\mathbb{R}_+^*$. Arătaţi că, dacă $x+y+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=16$, atunci $xy\le 16$.

Soluţie

Întrucât $x,\ y\in\mathbb{R}_+^*$, rezultă că $x+y\ge 2\sqrt{xy}$ şi $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\ge 2\sqrt{\frac{x^2}{y}\cdot\frac{y^2}{x}}=2\sqrt{xy}$. Drept urmare, $x+y+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\ge 4\sqrt{xy}$, ceea ce conduce la $4\sqrt{xy}\le 16$, de unde $\sqrt{xy}\le 4$ şi, deci, $xy\le 16$.

28. Aflaţi numărul natural $\overline{abcd}$, ştiind că extragerea rădăcinii pătrate din el se face după următoarea schemă :

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{\overline{abcd}} & \overline{xy} \\ \cline{2-2} e & \overline{zt}\cdot t=\overline{4cd} \\ \cline{1-1} \overline{4cd} & \\ \overline{4cd} & \\ \cline{1-1} === & \end{array}$$

($a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ x,\ y,\ z$ şi t sunt cifre).

Soluţie

Deoarece $x^2=e$ şi $e\le 9$, rezultă că $x\le 3$. Remarcând faptul că x reprezintă rădăcina pătrată (eventual, cu aproximaţie de o unitate prin lipsă) a numărului $\overline{ab}$, iar $\overline{ab}\ge 10$, deducem că $x\ge 3$. Drept urmare, $x=3$. Totodată, $z=6$ (căci $z=2x$). Întrucât $\overline{ab}-e=4$, rezultă că $\overline{ab}-9=4$, de unde $\overline{ab}=13$. Din faptul că $\overline{6t}\cdot t=\overline{4cd}$ deducem că t nu poate fi decât 7, ceea ce arată că $\overline{cd}=69$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $\overline{abcd}=1369$.

29. Fie $x,\ y\in\mathbb{R}$ şi $a=\sqrt{(x+y+5)^2}+\sqrt{(x+y-9)^2}$. Arătaţi că, dacă $-2\le x<5$ şi $-3\le y<4$, atunci $a=14$.

O.M., etapa locală, Iaşi, 2000

Soluţie

Evident, $a=|x+y+5|+|x+y-9|$.

Remarcând faptul că $x\ge -2$ şi $y\ge -3$, deducem că $x+y\ge -5$, de unde $x+y+5\ge 0$. Drept urmare, $|x+y+5|=x+y+5$. Cum $x<5$ şi $y<4$, rezultă că $x+y<9$, de unde $x+y-9<0$, ceea ce implică $|x+y-9|=9-(x+y)$.

Ca urmare a celor stabilite anterior, $a=x+y+5+9-(x+y)=14$.

30. Determinaţi mulţimea $A=\left\{n\in\mathbb{N}\,\middle|\,\sqrt{10-\sqrt{n}}\in\mathbb{N}\right\}$.

Soluţie

Evident, $\sqrt{10-\sqrt{n}}\in\mathbb{N}$ dacă şi numai dacă $10-\sqrt{n}$ este pătrat perfect.

Deoarece $n\in\mathbb{N}$ şi $10-\sqrt{n}\le 10$, condiţia anterioară impune ca $10-\sqrt{n}\in\{0,\ 1,\ 4,\ 9\}$.

Dacă $10-\sqrt{n}=0$, atunci $\sqrt{n}=10$, de unde $n=100$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $10-\sqrt{n}=1$, atunci $\sqrt{n}=9$, de unde $n=81$.
Dacă $10-\sqrt{n}=4$, atunci $n=36$, iar dacă $10-\sqrt{n}=9$, atunci $n=1$.
Din cele stabilite anterior deducem că $A=\{1, 36, 81, 100\}$.

31. Determinați numerele naturale $\overline{ab}$ cu proprietatea că $\sqrt{\overline{ab}-\sqrt{\overline{ab}+5}-3b}\in\mathbb{N}$.

Soluție

Fie $A=\overline{ab}-\sqrt{\overline{ab}+5}-3b$. Condiția din enunț este îndeplinită dacă și numai dacă A este pătrat perfect. Evident, este necesar ca $\sqrt{\overline{ab}+5}\in\mathbb{N}$, ceea ce are loc atunci și numai atunci când $\overline{ab}\in\{11, 20, 31, 44, 59, 76, 95\}$. Rămâne să cercetăm care dintre aceste valori fac ca A să fie pătrat perfect.
Dacă $\overline{ab}=11$, atunci $A=11-\sqrt{16}-3=4$. Cum 4 este pătrat perfect, $\overline{ab}=11$ este o soluție a problemei.
Dacă $\overline{ab}=20$, atunci $A=20-\sqrt{25}=20-5=15$. Deoarece 15 nu este pătrat perfect, situația considerată nu convine.
Dacă $\overline{ab}=31$, atunci $A=22$. Întrucât 22 nu este pătrat perfect, $\overline{ab}=31$ nu convine.
Dacă $\overline{ab}=44$, atunci $A=25$. Cum 25 este pătrat perfect, $\overline{ab}=44$ este o soluție a problemei.
Dacă $\overline{ab}=59$, atunci $A=24$. Deoarece 24 nu este pătrat perfect, situația considerată nu convine.
Dacă $\overline{ab}=76$, atunci $A=49$. Remarcând faptul că 49 este pătrat perfect, $\overline{ab}=76$ este soluție a problemei.
Dacă $\overline{ab}=95$, atunci $A=75$, deci această situație nu convine.
Drept urmare, $\overline{ab}\in\{11, 44, 76\}$.

32. Determinați cifrele a și b astfel încât $\sqrt{\overline{26ab9}}\in\mathbb{N}$.

Soluție

Condiția din enunț este îndeplinită dacă și numai dacă există $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $\overline{26ab9}=n^2$. Cum $u(n^2)=9$, rezultă că $u(n)=3$ sau $u(n)=7$. Remarcând faptul că $26009\le\overline{26ab9}\le 26999$, deducem că $\sqrt{26009}\le n\le\sqrt{26999}$. Deoarece $\sqrt{26009}>161$, $\sqrt{26999}<165$, $n\in\mathbb{N}$ și $u(n)\in\{3, 7\}$, conchidem că $n=163$. Având în vedere că $163^2=26569$, rezultă că $a=5$ și $b=6$.

33. Determinați cea mai mică valoare a numărului natural n cu proprietatea că $\sqrt{2003-n}\in\mathbb{N}$.

Soluție

Deoarece $n\ge 0$, rezultă că $2003-n\le 2003$, de unde $\sqrt{2003-n}\le\sqrt{2003}$. Cum $\sqrt{2003}=44{,}6\ldots$, rezultă că $\sqrt{2003-n}\le 44{,}6\ldots$. Ținând seama de faptul că n trebuie să fie cel mai mic posibil, deducem că $\sqrt{2003-n}$ trebuie să fie cel mai mare posibil. Având în vedere atât cele stabilite anterior, cât și faptul că $\sqrt{2003-n}\in\mathbb{N}$, conchidem că $\sqrt{2003-n}=44$, ceea ce conduce la $2003-n=1936$, de unde $n=67$.

34. Determinați valorile lui $x\in\mathbb{N}^*$ cu proprietatea că media geometrică a numerelor x și 60 este un număr natural mai mic sau egal cu 90.

Soluție

Întrucât media geometrică a numerelor x și 60 este $\sqrt{60x}$, rezultă că $\sqrt{60x}\le 90$, ceea ce conduce la $60x\le 8100$, de unde $x\le 135$. Totodată, $\sqrt{60x}\in\mathbb{N}$, deci $60x$ trebuie să fie pătrat perfect, ceea ce are loc dacă și numai dacă există

Scanned with OKEN Scanner

$n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $x = 15n^2$ (căci $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$). Cum $x \leq 135$, rezultă că $15n^2 \leq 135$, de unde $n^2 \leq 9$, ceea ce conduce la $n \leq 3$. Drept urmare, $n = 1$, sau $n = 2$, sau $n = 3$ și, deci, $x \in \{15, 60, 135\}$.

35. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $a = 5n - n^2$. Determinați valorile lui n pentru care $\sqrt{a} \in \mathbb{N}$.

Soluție

Evident, este necesar ca $a \geq 0$, ceea ce conduce la $5n - n^2 \geq 0$, de unde $n(5-n) \geq 0$. Cum $n > 0$ (căci $n \in \mathbb{N}^*$), rezultă că $5 - n \geq 0$, deci $n \leq 5$. Drept urmare, $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Remarcând faptul că dintre valorile obținute numai 1, 4 și 5 fac ca a să fie pătrat perfect, deducem că soluțiile problemei sunt : 1, 4 și 5.

36. Determinați valorile lui $n \in \mathbb{N}$ pentru care $\sqrt{\frac{3n+13}{3n+1}} \in \mathbb{N}$.

Soluție

Pentru ca $\sqrt{\frac{3n+13}{3n+1}} \in \mathbb{N}$, este necesar ca $\frac{3n+13}{3n+1} \in \mathbb{N}$. Cum $\frac{3n+13}{3n+1} = 1 + \frac{12}{3n+1}$, cerința anterioară impune ca $\frac{12}{3n+1} \in \mathbb{N}$. Dacă $n \geq 4$, atunci $3n+1 \geq 13$, ceea ce arată că $0 < \frac{12}{3n+1} < 1$, deci, în cazul considerat, condiția $\frac{12}{3n+1} \in \mathbb{N}$ nu poate fi îndeplinită. Rezultă că doar numerele 0, 1, 2, 3 ar putea satisface condiția inițială. Prin verificare a fiecăreia dintre aceste valori, se constată că numai pentru $n = 1$ condiția din enunț este îndeplinită.

37. Determinați valorile lui $n \in \mathbb{Z}$ pentru care $\sqrt{\frac{3n+3}{n+3}} \in \mathbb{N}$.

Soluție

Pentru ca $\sqrt{\frac{3n+3}{n+3}} \in \mathbb{N}$, este necesar ca $\frac{3n+3}{n+3} \in \mathbb{N}$. Deoarece $\frac{3n+3}{n+3} = \frac{3n+9-6}{n+3} = 3 - \frac{6}{n+3}$, condiția anterioară impune ca $\frac{6}{n+3} \in \mathbb{Z}$ și $\frac{6}{n+3} \leq 3$. Având în vedere că $n+3 \in \mathbb{Z}$ (căci $n \in \mathbb{Z}$), cerința ca $\frac{6}{n+3} \in \mathbb{Z}$ este îndeplinită dacă și numai dacă $n+3 \in \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$, ceea ce conduce la $n \in \{-9, -6, -5, -4, -2, -1, 0, 3\}$. Rămâne să cercetăm pentru care dintre aceste valori $\frac{3n+3}{n+3}$ este pătrat perfect (pentru ca $\sqrt{\frac{3n+3}{n+3}} \in \mathbb{N}$). Prin verificare, se constată că ultima cerință este îndeplinită numai dacă $n \in \{-9, -4, -1, 0\}$.

38. Determinați valorile lui $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\frac{3\sqrt{n} + \sqrt{5}}{3\sqrt{5} - \sqrt{n}} \in \mathbb{Z}$.

Soluție

Evident, condiția din enunț este îndeplinită dacă și numai dacă există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\frac{3\sqrt{n} + \sqrt{5}}{3\sqrt{5} - \sqrt{n}} = k$, ceea ce conduce la $(k+3)\sqrt{n} = (3k-1)\sqrt{5}$, de unde $\sqrt{n} = \sqrt{5}\frac{3k-1}{k+3}$. Deoarece $\sqrt{n} \geq 0$, este necesar ca $\frac{3k-1}{k+3} \geq 0$. Ridicând la pătrat ambii membri ai ultimei egalități, obținem $n = 5\left(\frac{3k-1}{k+3}\right)^2$. Cum $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, iar

Scanned with OKEN Scanner

5 este număr prim, această egalitate are loc numai dacă $\frac{3k-1}{k+3} \in \mathbb{Z}$ și, cum $\frac{3k-1}{k+3} \geq 0$, conchidem că $\frac{3k-1}{k+3} \in \mathbb{N}$. Remarcând și faptul că $\frac{3k-1}{k+3} = 3 - \frac{10}{k+3}$, deducem că $\frac{10}{k+3} \in \mathbb{Z}$ și $\frac{10}{k+3} \leq 3$, ceea ce are loc atunci și numai atunci când $k+3 \in \{-10, -5, -2, -1, 5, 10\}$. Drept urmare, $k \in \{-13, -8, -5, -4, 2, 7\}$. În baza celor stabilite anterior, conchidem că $n \in \{5, 20, 80, 125, 320, 845\}$.

39. Determinați numerele naturale $\overline{ab}$ cu proprietatea că $\sqrt{\frac{\overline{ab}+12}{\overline{ab}-12}} \in \mathbb{N}$.

Soluție

Condiția din enunț este îndeplinită dacă și numai dacă există $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ astfel încât $\frac{\overline{ab}+12}{\overline{ab}-12} = n^2$. Folosind proporții derivate, ultima egalitate conduce la $\frac{\overline{ab}}{12} = \frac{n^2+1}{n^2-1}$. Ținând seama și de faptul că $\frac{n^2+1}{n^2-1} = 1 + \frac{2}{n^2-1}$, deducem că $\overline{ab} = 12 + \frac{24}{n^2-1}$. Întrucât $\overline{ab} \in \mathbb{N}$, egalitatea anterioară poate avea loc doar dacă $n^2 - 1 | 24$, ceea ce arată că $n^2 - 1 \in \{3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, de unde $n^2 \in \{4, 5, 7, 9, 13, 25\}$. Cum $n \in \mathbb{N}$, rezultă că $n^2 = 4$, sau $n^2 = 9$, sau $n^2 = 25$. Dacă $n^2 = 4$, atunci $\overline{ab} = 20$. Dacă $n^2 = 9$, atunci $\overline{ab} = 15$, iar dacă $n^2 = 25$, atunci $\overline{ab} = 13$.

40. Fie a, b, c trei cifre nenule și distincte. Determinați aceste cifre, știind că $\sqrt{\overline{a,(b)} + \overline{a,(c)}} \in \mathbb{N}$.

Soluție

Este necesar ca $b \neq 9$ și $c \neq 9$.

Evident, condiția din enunț este îndeplinită dacă și numai dacă există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\overline{a,(b)} + \overline{a,(c)} = n^2$. Remarcând faptul că $\overline{a,(b)} + \overline{a,(c)} = a + \frac{b}{9} + a + \frac{c}{9} = 2a + \frac{b+c}{9}$, egalitatea anterioară conduce la $2a + \frac{b+c}{9} = n^2$. Deoarece $2a \in \mathbb{N}$ și $n^2 \in \mathbb{N}$, este necesar ca $\frac{b+c}{9} \in \mathbb{N}$, ceea ce are loc dacă și numai dacă $b + c = 9$ (căci $2 \leq b + c \leq 16$). Drept urmare, $2a + 1 = n^2$. Având în vedere că $1 \leq a \leq 9$, ultima egalitate are loc dacă și numai dacă $a = 4$ și $n = 3$. Ținând seama atât de cele stabilite anterior, cât și de faptul că cifrele a, b și c sunt distincte, soluțiile problemei sunt : $a = 4$, $b = 1$, $c = 8$; $a = 4$, $b = 2$, $c = 7$; $a = 4$, $b = 3$, $c = 6$; $a = 4$, $b = 6$, $c = 3$; $a = 4$, $b = 7$, $c = 2$ și $a = 4$, $b = 8$, $c = 1$.

41. Determinați numerele naturale $\overline{ab}$ cu proprietatea că $\sqrt{\overline{ab} - \overline{ba}} = a + b$.

O.M., etapa județeană, Brăila, 1996

Soluție

Evident, este necesar ca $a \geq 1$, $b \geq 1$ și $a > b$.

Remarcăm și faptul că :

$$\sqrt{\overline{ab} - \overline{ba}} = a + b \Leftrightarrow \overline{ab} - \overline{ba} = (a+b)^2 \Leftrightarrow 9a - 9b = (a+b)^2 \Leftrightarrow 9(a-b) = (a+b)^2.$$

Deoarece 9 și $(a+b)^2$ sunt pătrate perfecte, ultima egalitate poate avea loc numai dacă $a - b$ este pătrat perfect. Având în vedere că $1 \leq a - b \leq 8$ (căci

Scanned with OKEN Scanner

$1 \le b < a \le 9$), rezultă că $a-b=1$ sau $a-b=4$.

Dacă $a-b=1$, atunci $(a+b)^2=9$, de unde $a+b=3$. Drept urmare, $a=2$ și $b=1$.

Dacă $a-b=4$, atunci $(a+b)^2=36$, de unde $a+b=6$. Deci, $a=5$ și $b=1$.

Ca urmare a celor stabilite anterior, numerele căutate sunt 21 și 51.

42. Determinați cifrele a, b și c, știind că acestea sunt numere consecutive crescătoare și că $\sqrt{\overline{accb}} \in \mathbb{N}$.

Soluție

Evident, $\sqrt{\overline{accb}} \in \mathbb{N}$ dacă și numai dacă numărul $\overline{accb}$ este pătrat perfect. Cum b este cifra unităților acestui număr, rezultă că $b \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$.

Remarcând faptul că $1 \le a < b < c \le 9$, deducem că $b \in \{4, 5, 6\}$.

Dacă $b=4$, atunci $a=3$ și $c=5$, iar $\overline{accb}=3554$. Întrucât $\sqrt{3554} \notin \mathbb{N}$, $b=4$ nu convine.

Dacă $b=5$, atunci $a=4$ și $c=6$, iar $\overline{accb}=4665$. Deoarece $\sqrt{4665} \notin \mathbb{N}$, nici $b=5$ nu convine.

Dacă $b=6$, atunci $a=5$ și $c=7$, iar $\overline{accb}=5776$. Având în vedere că $\sqrt{5776}=76 \in \mathbb{N}$, soluția problemei este $a=5$, $b=6$, $c=7$.

43. Determinați numerele naturale $\overline{abc}$ cu proprietatea că $\sqrt{\overline{abc}-\sqrt{c}} \in \mathbb{N}$.

Soluție

Condiția din enunț este îndeplinită dacă și numai dacă $\overline{abc}-\sqrt{c}$ este pătrat perfect. Evident, este necesar ca $\sqrt{c} \in \mathbb{N}$. Cum c este cifră, rezultă că $c \in \{0, 1, 4, 9\}$.

Dacă $c=0$, atunci $\overline{abc}-\sqrt{c}=\overline{ab0}$. Pătratele perfecte de trei cifre care au ca cifră a unităților pe 0 sunt : 100, 400 și 900. Deci, în cazul considerat, $\overline{abc} \in \{100, 400, 900\}$.

Fie $c=1$. Atunci, $\overline{abc}-\sqrt{c}=\overline{ab0}$. Rezultă că, în acest caz, soluțiile problemei sunt : 101, 401 și 901.

Dacă $c=4$, atunci $\overline{abc}-\sqrt{c}=\overline{ab4}-2=\overline{ab2}$. Deoarece nu există nici un pătrat perfect care să aibă ca cifră a unităților pe 2, situația considerată nu convine.

Fie $c=9$. Atunci, $\overline{abc}-\sqrt{c}=\overline{ab6}$. Întrucât singurele pătrate perfecte de trei cifre care au ca cifră a unităților pe 6 sunt : 196, 256, 576 și 676, rezultă că, în acest caz, $\overline{abc} \in \{199, 259, 579, 679\}$.

44. Fie $a = 9 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{10 \text{ ori}}\underbrace{99\ldots9}_{10 \text{ ori}} + 25$. Calculați $\sqrt{a}$.

Soluție

Evident, $a = 9(1 \cdot 10^{19} + 1 \cdot 10^{18} + \ldots + 1 \cdot 10^{10} + 9 \cdot 10^9 + 9 \cdot 10^8 + \ldots + 9) + 25 =$

$= 9\left[10^{10}(10^9 + 10^8 + \ldots + 1) + 9(10^9 + 10^8 + \ldots + 1)\right] + 25 = 9(10^9 + 10^8 + \ldots + 1)(10^{10} + 9) + 25$.

Remarcând faptul că $9(10^9 + 10^8 + \ldots + 1) = (10-1)(10^9 + 10^8 + \ldots + 1) = 10^{10} - 1$, deducem că $a = (10^{10} - 1)(10^{10} + 9) + 25$, de unde $a = 10^{20} + 8 \cdot 10^{10} + 16 = (10^{10} + 4)^2$. Drept urmare, $\sqrt{a} = 10^{10} + 4 = 1\underbrace{00\ldots0}_{9 \text{ cifre}}4$.

45. Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Arătați că :

a) dacă $x \in \mathbb{Q}$, iar $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $x \pm y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

b) dacă $x \in \mathbb{Q}^*$ și $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci $xy \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție

a) Presupunem, din contra, că $x+y\in\mathbb{Q}$. Atunci, având în vedere că $y=(x+y)-x$ și că $x\in\mathbb{Q}$, deducem că $y\in\mathbb{Q}$ (căci diferența a două numere raționale este număr rațional). Contradicția la care s-a ajuns arată că presupunerea făcută este falsă.

Analog, arătăm că $x-y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

b) Presupunem, din contra, că $xy\in\mathbb{Q}$. În acest caz, ținând seama de faptul că $x\in\mathbb{Q}^*$ și că $y=\frac{xy}{x}$, deducem că $y\in\mathbb{Q}$. Contradicția la care s-a ajuns arată că presupunerea făcută este falsă.

46. a) Fie $x\in\mathbb{Q}$ și numerele reale $a=\frac{\sqrt{3}-x}{\sqrt{2}}$, $b=\frac{3x-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Arătați că a și b nu pot fi simultan numere raționale.

b) Fie $a,\ b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ astfel încât $a+b\in\mathbb{Q}$. Demonstrați că $ax+by\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, oricare ar fi $x,\ y\in\mathbb{Q}$, cu $x\neq y$.

Soluție

a) Presupunem, din contra, că $a,\ b\in\mathbb{Q}$. Atunci, $a+b\in\mathbb{Q}$. Cum $a+b=x\sqrt{2}$, rezultă că $x\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$, ceea ce are loc dacă și numai dacă $x=0$. Întrucât, în acest caz, $a=\sqrt{\frac{3}{2}}$, iar $\sqrt{\frac{3}{2}}\notin\mathbb{Q}$, presupunerea făcută este falsă.

b) Deoarece $ax+by=(a+b)x+(y-x)b$, iar $(a+b)x\in\mathbb{Q}$ (căci $a+b\in\mathbb{Q}$ și $x\in\mathbb{Q}$), iar $(y-x)b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (fiindcă $y-x\in\mathbb{Q}^*$ și $b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$), rezultă că $ax+by\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

47. Arătați că există o infinitate de numere iraționale astfel încât suma și produsul lor să fie numere raționale.

Soluție

Fie $a,\ b\in\mathbb{Q},\ b\neq 0$ și numerele $x=a+b\sqrt{2}$, $y=a-b\sqrt{2}$. Deoarece $b\in\mathbb{Q}^*$ și $\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, rezultă că $b\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Remarcând faptul că $a\in\mathbb{Q}$, deducem că $a+b\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, deci $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Analog, arătăm că $y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Remarcăm și faptul că $x+y=2a$, $xy=a^2-2b^2$, iar $2a\in\mathbb{Q}$ și $a^2-2b^2\in\mathbb{Q}$ (căci $a,\ b\in\mathbb{Q}$). Deci, $x+y\in\mathbb{Q}$ și $xy\in\mathbb{Q}$. Ținând seama atât de cele stabilite anterior, cât și de faptul că $a,\ b$ pot lua o infinitate de valori (fiindcă mulțimea $\mathbb{Q}$ este infinită), cerința enunțului a fost îndeplinită.

48. Fie $a\in\mathbb{R}$. Arătați că, dacă $a^7\in\mathbb{Q}$ și $a^{10}\in\mathbb{Q}$, atunci $a^n\in\mathbb{Q}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

Soluție

Dacă $a=0$, atunci $a^n=0$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

Fie $a\neq 0$. Atunci, $a^{10}\in\mathbb{Q}^*$ și $a^7\in\mathbb{Q}^*$. Cum $a^3=a^{10}:a^7$, rezultă că $a^3\in\mathbb{Q}^*$, de unde $a^9\in\mathbb{Q}^*$ (căci $a^9=(a^3)^3$). Remarcând și faptul că $a=a^{10}:a^9$, deducem că $a\in\mathbb{Q}^*$. Drept urmare, $a^n\in\mathbb{Q}^*$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

49. Fie $x,\ y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Arătați că, dacă $x+y\in\mathbb{Q}$, $xy\in\mathbb{Q}$ și $\frac{x}{y}\in\mathbb{Q}$, atunci $x+y=0$.

Soluție

Deoarece $x\neq 0$ și $y\neq 0$ (căci $x,\ y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$), rezultă că $xy\neq 0$ și $\frac{x}{y}\neq 0$. Pentru fixare, să presupunem că $x>0$. Întrucât $xy\in\mathbb{Q}^*$ și $\frac{x}{y}\in\mathbb{Q}^*$, rezultă că

Scanned with OKEN Scanner

$(xy)\cdot\frac{x}{y}\in\mathbb{Q}^*$, de unde $x^2\in\mathbb{Q}_+^*$. Atunci, există $r\in\mathbb{Q}_+^*$ astfel încât $x^2=r$, ceea ce implică $x=\sqrt{r}$. Cum $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, r nu poate fi pătratul unui număr raţional. Remarcând faptul că $\frac{y}{x}\in\mathbb{Q}$ (fiindcă inversul unui număr raţional nenul este număr raţional), deducem că există $s\in\mathbb{Q}$ astfel încât $\frac{y}{x}=s$, de unde $y=sx=s\sqrt{r}$. Drept urmare, $x+y=(1+s)\sqrt{r}$. Având în vedere că $x+y\in\mathbb{Q}, 1+s\in\mathbb{Q}$ şi $\sqrt{r}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, ultima egalitate are loc dacă şi numai dacă $1+s=0$, ceea ce implică $s=-1$, iar $y=-\sqrt{r}$. Rezultă că $x+y=\sqrt{r}+(-\sqrt{r})=0$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

50. Fie $x\in\mathbb{N}$ şi $y\in\mathbb{R}_+$ astfel încât $x+y=3+\sqrt{2}$, iar $a=\frac{2x+y}{x+4y}$. Arătaţi că $\frac{1}{4}\le a\le\frac{7\sqrt{2}+2}{8}$.

Soluţie

Întrucât $a=\frac{x+(x+y)}{3y+(x+y)}$ şi $x+y=3+\sqrt{2}$, rezultă că $a=\frac{x+3+\sqrt{2}}{3y+3+\sqrt{2}}$. Ţinând seama şi de faptul că $x\ge 0$ şi $y\ge 0$, deducem că a ia cea mai mică (mare) valoare posibilă atunci când x este cel mai mic (mare) posibil, iar y este cel mai mare (mic) posibil. Remarcăm şi faptul că egalitatea $x+y=3+\sqrt{2}$ are loc dacă şi numai dacă $x=0$ şi $y=3+\sqrt{2}$, sau $x=1$ şi $y=2+\sqrt{2}$, sau $x=2$ şi $y=1+\sqrt{2}$, sau $x=3$ şi $y=\sqrt{2}$, sau $x=4$ şi $y=\sqrt{2}-1$ (căci $x\in\mathbb{N}$ şi $y\in\mathbb{R}_+$).

Ca urmare a celor stabilite anterior, conchidem că $a\ge\frac{0+3+\sqrt{2}}{3(3+\sqrt{2})+3+\sqrt{2}}=\frac{1}{4}$ şi, totodată, că $a\le\frac{4+3+\sqrt{2}}{3(\sqrt{2}-1)+3+\sqrt{2}}=\frac{7+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}+2}{8}$.

PROBLEME PROPUSE

1. Determinaţi cifrele a şi b pentru care $\sqrt{\overline{2ab}}\in\mathbb{N}$.

2. Determinaţi cifrele a şi b pentru care $\sqrt{\overline{a2b}}\in\mathbb{N}$.

3. Determinaţi cifrele a şi b astfel încât $\sqrt{1,ab}\in\mathbb{Q}$.

4. Fie $a=1+3+5+\ \ldots\ +111$. Calculaţi $\sqrt{a}$.

5. Fie $a=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 6}+\frac{1}{3\cdot 8}+\ \ldots\ +\frac{1}{48\cdot 98}+\frac{1}{49\cdot 100}$. Calculaţi $\sqrt{a}$.

6. Calculaţi $\sqrt{48\cdot 75\cdot 98\cdot 242}$.

7. a) Fie $a=\sqrt{2}(\sqrt{12}+\sqrt{8})-\sqrt{8}(\sqrt{18}-\sqrt{12})+\sqrt{27}(\sqrt{12}-\sqrt{8})$. Arătaţi că $a\in\mathbb{N}$.
   b) Demonstraţi că $(\sqrt{18}-\sqrt{12})\cdot 2-(\sqrt{72}-\sqrt{972}):2=(\sqrt{1875}+\sqrt{450}):5$.

Scanned with OKEN Scanner

8. Determinați numărul $\overline{ab}$, știind că $\sqrt{\overline{ab}}+\sqrt{4\cdot\overline{ab}}+\sqrt{9\cdot\overline{ab}}+\sqrt{16\cdot\overline{ab}}=50$.

9. Fie $a=\sqrt{3}+\sqrt{12}+\sqrt{27}+\ \ldots\ +\sqrt{300}$ și $b=\sqrt{5}+\sqrt{20}+\sqrt{45}+\ \ldots\ +\sqrt{500}$. Arătați că $a\sqrt{5}=b\sqrt{3}$.

10. Fie $a=\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{32}-\sqrt{128}$ și $b=\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}+\sqrt{128}-1$. Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b.

11. Fie $a=(2\sqrt{2}-3\sqrt{8}+4\sqrt{18}-5\sqrt{32}+6\sqrt{50})\sqrt{3}$ și $b=(5\sqrt{3}-6\sqrt{12}+7\sqrt{27}-8\sqrt{48}+9\sqrt{75})\sqrt{2}$. Calculați media geometrică a numerelor a și b.

12. Calculați media geometrică a două numere reale strict pozitive, știind că media aritmetică a lor este 5, iar media armonică, $7,2$.

13. Fie $a=(5\sqrt{252}-6\sqrt{112}+2\sqrt{63}):\sqrt{28}$. Arătați că $a=6$.

14. Simplificați fracția $\dfrac{3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}}{3\sqrt{8}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}}$.

15. Fie $a=\left(\dfrac{8}{\sqrt{54}}-\dfrac{8}{3\sqrt{44}}-\dfrac{6}{\sqrt{99}}-\dfrac{16}{\sqrt{216}}\right):\dfrac{5}{3\sqrt{11}}$. Arătați că $a=-2$.

16. Fie $a=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}+2\sqrt{6}+\sqrt{40}+2\sqrt{14}}{\sqrt{12}+\sqrt{20}+\sqrt{28}}$. Arătați că $a=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$.

17. Fie $a=\sqrt{2\dfrac{1}{4}}+\sqrt{11\dfrac{1}{9}}+\sqrt{18\dfrac{1}{16}}-9\dfrac{1}{12}$. Arătați că $a=0$.

18. Fie $a=\sqrt{1-\dfrac{16}{25}}+\sqrt{5-\dfrac{4}{25}}+\sqrt{7-\dfrac{6}{25}}+\sqrt{10+\dfrac{6}{25}}+\sqrt{13-\dfrac{1}{25}}+\sqrt{15-\dfrac{14}{25}}$. Arătați că $\sqrt{a}\in\mathbb{N}$.

19. Determinați $x\in\mathbb{N}$, astfel încât $\sqrt{\dfrac{600}{x+2}}\in\mathbb{N}$.

20. Determinați $x\in\mathbb{Z}$, astfel încât $\sqrt{\dfrac{1440}{|3x+2|}}\in\mathbb{N}$.

21. Simplificați fracția $\dfrac{2+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}}{3+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15}}$.

22. Fie $a=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{3^2}+\sqrt{3^3}+\ \ldots\ +\sqrt{3^{99}}+\sqrt{3^{100}}}{6+2\sqrt{3}}$. Arătați că $4a=3^{50}-1$.

23. Fie $a=\left(5\dfrac{2}{3}:\sqrt{0,0289}\right)\cdot 0,3-2,(6)\left(\sqrt{\dfrac{81}{256}}+0,1875\right)-4\dfrac{2}{3}:\sqrt{2\dfrac{34}{81}}$. Arătați că $a=5$.

24. Determinați x din fiecare dintre următoarele egalități:

a) $\dfrac{3x-1}{\sqrt{1225}-2}=\dfrac{0,25+(1,(6))^2\sqrt{0,0009}}{(2,5)^{-1}+\sqrt{0,36}}$;

b) $\dfrac{2\sqrt{x+99}}{\sqrt{\dfrac{867}{75}}+\sqrt{\dfrac{63}{175}}}=\dfrac{\sqrt{7,29}-\sqrt{6,25}}{\sqrt{0,1024}-\sqrt{0,0784}}$.

Scanned with OKEN Scanner

25. Determinați numerele reale x, y și z, știind că acestea sunt direct proporționale cu $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{98}$ și că $x+y+z=24$.

26. Determinați cel mai mic număr natural nenul n cu proprietatea că $\sqrt{3\sqrt{2n}} \in \mathbb{N}$.

27. Determinați fracția cu termeni pozitivi echivalentă cu $\frac{19}{39}$ și pentru care produsul termenilor săi este 11856.

28. Aflați fracțiile cu termeni pozitivi echivalente cu $\frac{2}{3}$, știind că pentru fiecare dintre ele diferența dintre pătratul numitorului și pătratul numărătorului este un număr natural de două cifre.

29. Determinați numerele naturale consecutive a, b și c, știind că $a < 2\sqrt{2} < b < 2\sqrt{3} < c$.

30. Arătați că $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{26} < 12$.

31. Arătați că $\sqrt{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{8}} < 3$.

32. Fie $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $0 \le x \le 341$ și $a=\sqrt{x+100}+\sqrt{x+500}$. Arătați că $10(\sqrt{5}+1) \le a \le 50$.

33. Arătați că $\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{6}}+\frac{7}{\sqrt{12}}+\frac{9}{\sqrt{20}}+\frac{11}{\sqrt{30}} > 10$.

34. Fie a, b, c trei numere reale pozitive. Arătați că $(a+1)(b+1)(c+1) \ge 8\sqrt{abc}$.

35. Fie a, $b \in \mathbb{R}_+$. Arătați că, dacă $a+b+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=4$, atunci $ab \le 1$.

36. Fie x, $y \in \mathbb{R}$ și $a=\sqrt{(x+y+3)^2}+\sqrt{(x+y-5)^2}$. Arătați că, dacă $-1 \le x < 2$ și $-2 \le y < 3$, atunci $a=8$.

37. Fie $x \in \mathbb{N}$ și $x \le 1000$. Determinați valorile lui x pentru care $\sqrt{8+\sqrt{x}} \in \mathbb{N}$.

38. Determinați numerele $\overline{ab}$ pentru care $\sqrt{\overline{abab}-\overline{ab}} \in \mathbb{N}$.

39. Determinați numerele $\overline{ab}$ pentru care $\sqrt{\overline{ab}+\overline{ba}} \in \mathbb{N}$.

40. Determinați numerele $\overline{ab}$ pentru care $\sqrt{\overline{ab}+3\sqrt{\overline{ab}}+b+4} \in \mathbb{N}$.

41. Determinați cifrele a și b, astfel încât $\sqrt{\overline{23ab6}} \in \mathbb{N}$.

42. Determinați valorile lui $x \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că media geometrică a numerelor x și 45 este un număr natural mai mic sau egal cu 60.

43. Determinați cel mai mic număr natural mai mare decât 2003, știind că acesta este multiplu de 36 și că $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

44. Determinați valorile lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $\sqrt{12n-3n^2} \in \mathbb{N}$.

Scanned with OKEN Scanner

45. Fie $n \in \mathbb{N}$ şi $n \geq 2$. Determinaţi valorile lui n pentru care $\sqrt{\frac{5n+7}{n-1}} \in \mathbb{N}$.

46. Fie $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-2, -1\}$. Determinaţi valorile lui n pentru care $\sqrt{\frac{5n+2}{n+2}} \in \mathbb{N}$.

47. Determinaţi valorile lui $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\frac{2\sqrt{n}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{n}} \in \mathbb{Z}$.

48. Determinaţi numerele $\overline{ab}$ cu proprietatea că $\sqrt{\frac{\overline{ab}+24}{\overline{ab}-24}} \in \mathbb{N}$.

49. Determinaţi cifrele a şi b, ştiind că $\sqrt{\overline{1,(a)}+\overline{2,(b)}} \in \mathbb{Q}$.

50. Determinaţi cifrele a, b, c şi d, ştiind că acestea sunt consecutive crescătoare şi că $\sqrt{\overline{bacd}} \in \mathbb{N}$.

51. Fie $x \in \mathbb{N}$ şi $y \in \mathbb{R}_+$, astfel încât $x + z = 3 + \sqrt{2}$. Arătaţi că $\frac{1}{2} \leq \frac{2x+y}{x+2y} \leq \frac{6\sqrt{2}-5}{2}$.

RĂSPUNSURI

1. $a=2,\ b=5$, sau $a=5,\ b=6$, sau $a=8,\ b=9$ **2.** $a=1,\ b=1$, sau $a=2,\ b=5$, sau $a=3,\ b=4$, sau $a=5,\ b=9$, sau $a=6,\ b=5$, sau $a=7,\ b=9$ **3.** $a=2,\ b=1$, sau $a=b=4$, sau $a=6,\ b=9$, sau $a=9,\ b=6$ **4.** 56 **5.** $\frac{7}{10}$ **6.** 9240 **8.** 25 **10.** $\frac{9\sqrt{2}}{2}$, respectiv 4 **11.** 54 **12.** 6 **14.** $\frac{3}{2}$ **19.** $x \in \{4, 22, 148, 598\}$ **20.** $x \in \{-54, -14, -4\}$ **21.** $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ **24.** a) $x=4$, b) $x=1$ **25.** $x=4,\ y=6,\ z=14$ **26.** $n=72$ **27.** $\frac{76}{156}$ **28.** $\frac{4}{6}, \frac{6}{9}$ şi $\frac{8}{12}$ **29.** $a=2,\ b=3,\ c=4$ **37.** $x \in \{1, 64, 289, 784\}$ **38.** $\overline{ab} \in \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}$ **39.** $\overline{ab} \in \{29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92\}$ **40.** $\overline{ab} \in \{25, 36\}$ **41.** $a=7,\ b=1$ **42.** $x \in \{5, 20, 45, 80\}$ **43.** 2304 **44.** $n \in \{1, 3, 4\}$ **45.** $n=4$ **46.** $n \in \{-4, 0, 6\}$ **47.** $n \in \{3, 27, 147\}$ **48.** $a=3,\ b=6$ **49.** $a=1,\ b=8$, sau $a=2,\ b=7$, sau $a=3,\ b=9$, sau $a=4,\ b=5$, sau $a=5,\ b=4$, sau $a=6,\ b=3$, sau $a=7,\ b=2$, sau $a=8,\ b=1$ **50.** $a=3,\ b=4,\ c=5,\ d=6$.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL III

CALCUL ALGEBRIC

PROBLEME REZOLVATE

1. **Fie** $x \in \mathbb{R}$ **şi** $a = 2x^2 - 3x + 1$, $b = -x^2 + 4x - 5$, $c = 3x^2 - x + 2$. **Calculaţi :** $a + b$, $c - b$, $a + b + c$, $a - b + c$, $a - (b + c)$ **şi** $b - (a - c)$.

Soluţie

Ţinând seama de cele stabilite în ceea ce urmează :

$a + b = 2x^2 - 3x + 1 - x^2 + 4x - 5 = x^2 + x - 4$, $c - b = 3x^2 - x + 2 - (-x^2 + 4x - 5) = 3x^2 - x +$

$+2 + x^2 - 4x + 5 = 4x^2 - 5x + 7$, $a + b + c = 2x^2 - 3x + 1 - x^2 + 4x - 5 + 3x^2 - x + 2 = 4x^2 - 2$,

$a - b + c = 2x^2 - 3x + 1 + x^2 - 4x + 5 + 3x^2 - x + 2 = 6x^2 - 8x + 8$, $a - (b + c) = a - b - c =$

$= 2x^2 - 3x + 1 + x^2 - 4x + 5 - 3x^2 + x - 2 = -6x + 4$, $b - (a - c) = b - a + c = -x^2 + 4x - 5 -$

$-2x^2 + 3x - 1 + 3x^2 - x + 2 = 6x - 4$,

deducem că cerinţa enunţului a fost îndeplinită.

2. **Fie** $x \in \mathbb{R}$ **şi** $a = x^2 - 2x + 2$, $b = 2x + 3$, $c = x^2 - 2$. **Calculaţi :** ab, $ab + bc$, $(a - c)b$ **şi** $(a + b)(b + c)$.

Soluţie

Remarcând faptul că :

$ab = (x^2 - 2x + 2)(2x + 3) = (x^2 - 2x + 2) \cdot 2x + (x^2 - 2x + 2) \cdot 3 = 2x^3 - 4x^2 + 4x + 3x^2 - 6x + 6 =$

$= 2x^3 - x^2 - 2x + 6$, $ac + bc = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2) + (2x + 3)(x^2 - 2) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x^2 + 4x - 4 +$

$+2x^3 + 3x^2 - 4x - 6 = x^4 + 3x^2 - 10$, $(a - c)b = (x^2 - 2x + 2 - x^2 + 2)(2x + 3) = (-2x + 4)(2x + 3) =$

$= -4x^2 + 8x - 6x + 12 = -4x^2 + 2x + 12$, $(a + b)(b + c) = (x^2 - 2x + 2 + 2x + 3)(2x + 3 + x^2 - 2) =$

$= (x^2 + 5)(x^2 + 2x + 1) = x^4 + 5x^2 + 2x^3 + 10x + x^2 + 5 = x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 10x + 5$,

conchidem că cerinţa enunţului a fost îndeplinită.

3. **a) Fie** $x \in \mathbb{R}$ **şi** $a = (x - 1)(x - 2)(x + 3)(x + 4)$. **Arătaţi că, dacă** $x^2 + 2x - 1 = 0$, **atunci** $a = 14$.

b) Fie $x \in \mathbb{R}$ **şi** $a = (2x + 1)(2x + 3)(2x + 5)(2x + 7)$. **Arătaţi că, dacă** $x^2 + 4x + 2 = 0$, **atunci** $a = -7$.

Soluţie

a) Deoarece $a = [(x - 1)(x + 3)][(x - 2)(x + 4)] = (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x - 8)$, iar $x^2 + 2x = 1$, rezultă că $a = (1 - 3)(1 - 8) = 14$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

b) Remarcând faptul că $a = [(2x + 1)(2x + 7)][(2x + 3)(2x + 5)] = (4x^2 + 16x + 7)(4x^2 + 16x + 15) =$

$= [4(x^2 + 4x) + 7][4(x^2 + 4x) + 15]$, iar $x^2 + 4x = -2$, deducem că $a = (-8 + 7)(-8 + 15) = -7$.

Astfel, cerinţa enunţului a fost îndeplinită.

4. **Folosind formule de calcul prescurtat, aduceţi la forma cea mai simplă următoarele expresii :**

Scanned with OKEN Scanner

a) $(2x-3)^2-4(2x+1)^2+(3x+2)^2+3x(x+5)-6$;

b) $(3x+1)(3x-1)-(2x-1)^2-4(x-2)^2-4(3x-5)$;

c) $(x-1)^2(x+1)-(2x+1)(2x-1)(x+2)+3(x-1)(x+2)^2+10$.

Soluție

Se arată cu ușurință următoarele :

a) $(2x-3)^2-4(2x+1)^2+(3x+2)^2+3x(x+5)-6=4x^2-12x+9-16x^2-16x-4+9x^2+12x+$
$+4+3x^2+15x-6=-x+3$;

b) $(3x+1)(3x-1)-(2x-1)^2-4(x-2)^2-4(3x-5)=9x^2-1-4x^2+4x-1-4x^2+16x-16-$
$-12x+20=x^2+8x+2$;

c) $(x-1)^2(x+1)-(2x-1)(2x+1)(x+2)+3(x-1)(x+2)^2+4=(x-1)(x^2-1)-(4x^2-1)(x+2)+$
$+3(x-1)(x^2+4x+4)+10=x^3-x^2-x+1-4x^3-8x^2+x+2+3x^3+12x^2+12x-3x^2-12x-12+10=1$.

Drept urmare, cerința enunțului a fost îndeplinită.

5. **Demonstrați egalitățile :**

a) $(x-3)^2+(x+2)^2+(x+3)^2+(x+4)^2-(x+6)^2=(x-1)^2+x^2+(x+1)^2$;

b) $(2x+y)^2+(3x+y)^2-(5x+y)^2-(6x+y)^2+(7x+y)^2=(x+y)^2$.

Soluție

a) Deoarece $(x-3)^2+(x+2)^2+(x+3)^2+(x+4)^2-(x+6)^2=x^2-6x+9+x^2+4x+4+x^2+$
$+6x+9+x^2+8x+16-x^2-12x-36=3x^2+2$, iar $(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=x^2-2x+1+$
$+x^2+x^2+2x+1=3x^2+2$, prima dintre egalitățile considerate este demonstrată.

b) Remarcând faptul că $(2x+y)^2+(3x+y)^2-(5x+y)^2-(6x+y)^2+(7x+y)^2=4x^2+$
$+4xy+y^2+9x^2+6xy+y^2-25x^2-10xy-y^2-36x^2-12xy-y^2+49x^2+14xy+y^2=x^2+2xy+y^2=$
$=(x+y)^2$, cerința enunțului a fost îndeplinită.

6. **Demonstrați egalitățile :**

a) $(x+y)^2(x-y)^2=x^4-2x^2y^2+y^4$;

b) $(x-2)(x-3)(x+2)(x+3)=x^4-13x^2+36$;

c) $\left(x^2+y^2+xy\right)\left(x^2+y^2-xy\right)+x^2y^2=\left(x^2+y^2\right)^2$;

d) $(x-2)^2(x+2)^2-(x-3)^2(x+3)^2=10x^2-65$;

e) $(x+2y-3z)(x-2y+3z)-12yz=x^2-4y^2-9z^2$;

f) $(2x+y+3z)(2x+y-3z)-(x+3y-2z)(x-3y+2z)-4y(x-3z)=3x^2+10y^2-5z^2$.

Soluție

Întrucât :

a) $(x+y)^2(x-y)^2=[(x+y)(x-y)]^2=\left(x^2-y^2\right)^2=x^4-2x^2y^2+y^4$;

b) $(x-2)(x-3)(x+2)(x+3)=[(x-2)(x+2)][(x-3)(x+3)]=(x^2-4)(x^2-9)=x^4-13x^2+36$;

c) $\left(x^2+y^2+xy\right)\left(x^2+y^2-xy\right)+x^2y^2=\left[\left(x^2+y^2\right)+xy\right]\left[\left(x^2+y^2\right)-xy\right]+x^2y^2=\left(x^2+y^2\right)^2-$
$-x^2y^2+x^2y^2=\left(x^2+y^2\right)^2$;

d) $(x-2)^2(x+2)^2-(x-3)^2(x+3)^2=(x^2-4)^2-(x^2-9)^2=x^4-8x^2+16-(x^4-18x^2+81)=$
$=x^4-8x^2+16-x^4+18x^2-81=10x^2-65$;

e) $(x+2y-3z)(x-2y+3z)-12yz=[x+(2y-3z)][x-(2y-3z)]-12yz=x^2-(2y-3z)^2-12yz=$
$=x^2-\left(4y^2-12yz+9z^2\right)-12yz=x^2-4y^2-9z^2$;

f) $(2x+y+3z)(2x+y-3z)-(x+3y-2z)(x-3y+2z)-4y(x-3z)=[(2x+y)+3z][(2x+y)-3z]-$

Scanned with OKEN Scanner

$-[x+(3y-2z)][x-(3y-2z)]-4y(x-3z)=(2x+y)^2-9z^2-\left[x^2-(3y-2z)^2\right]-4y(x-3z)=$
$=4x^2+4xy+y^2-9z^2-x^2+9y^2-12yz+4z^2-4xy+12yz=3x^2+10y^2-5z^2$.
cerința enunțului a fost îndeplinită.

7. **Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Arătați că, dacă $(a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a-b+c-d)(a+b-c-d)$, atunci $ad=bc$.**

Soluție

Deoarece $(a+b+c+d)(a-b-c+d)=[(a+d)+(b+c)][(a+d)-(b+c)]=(a+d)^2-$
$-(b+c)^2=a^2-b^2-c^2+d^2+2ad-2bc$, iar $(a-b+c-d)(a+b-c-d)=$
$=[(a-d)-(b-c)][(a-d)+(b-c)]=(a-d)^2-(b-c)^2=a^2-b^2-c^2+d^2-2ad+2bc$,
prima dintre egalitățile din enunț conduce la $a^2-b^2-c^2+d^2+2ad-2bc=$
$=a^2-b^2-c^2+d^2-2ad+2bc$, de unde $ad=bc$.

8. **Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$. Arătați că, dacă $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$, atunci $x=y=z$.**

Soluție

Înmulțind ambii membri ai egalității $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$ cu 2, obținem $2x^2+2y^2+2z^2=2xy+2yz+2zx$, ceea ce conduce la $(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+$
$+(z^2-2zx+x^2)=0$, de unde $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$. Remarcând faptul că $(x-y)^2\geq 0$, $(y-z)^2\geq 0$ și $(z-x)^2\geq 0$ (oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$), ultima egalitate are loc dacă și numai dacă $x-y=0$, $y-z=0$ și $z-x=0$, de unde $x=y=z$.

9. **Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ și numerele $A=b^2+bc+c^2$, $B=c^2+ca+a^2$, $C=a^2+ab+b^2$. Arătați că, dacă $a+c=2b$, atunci $A+C=2B$.**

Soluție

Evident, $A+C=a^2+c^2+2b^2+b(a+c)$. Remarcând faptul că

$$2b^2+b(a+c)=2\left(\frac{a+c}{2}\right)^2+\frac{a+c}{2}(a+c)=\frac{(a+c)^2}{2}+\frac{(a+c)^2}{2}=(a+c)^2=a^2+2ac+c^2,$$

deducem că $A+C=2c^2+2ca+2a^2=2(c^2+ca+a^2)$, de unde $A+C=2B$.

10. **Fie $a, x, y, z \in \mathbb{R}$. Arătați că, dacă $x-2y+3z=14a$, atunci**

$$(x-2a)^2+(y+4a)^2+(z-6a)^2=x^2+y^2+z^2.$$

Soluție

Întrucât $(x-2a)^2+(y+4a)^2+(z-6a)^2=x^2-4ax+4a^2+y^2+8ay+16a^2+z^2-12az+36a^2=$
$=x^2+y^2+z^2-(4ax-8ay+12az)+56a^2=x^2+y^2+z^2-4a(x-2y+3z)+56a^2$, iar
$x-2y+3z=14a$, rezultă că $(x-2a)^2+(y+4a)^2+(z-6a)^2=x^2+y^2+z^2-56a^2+56a^2=$
$=x^2+y^2+z^2$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

11. **Fie $a=2^2+4^2+6^2+\ldots+100^2-(1^2+3^2+5^2+\ldots+99^2)$. Arătați că $a=5050$.**

Soluție

Evident, $a=(2^2-1^2)+(4^2-3^2)+(6^2-5^2)+\ldots+(100^2-99^2)=(2-1)(2+1)+(4-3)(4+3)+$
$+(6-5)(6+5)+\ldots+(100-99)(100+99)=3+7+11+\ldots+199=(3+199)+(7+195)+$
$+(11+191)+\ldots+(99+103)=\underbrace{202+202+202+\ldots+202}_{\text{25 de termeni}}=202\cdot 25=5050$.

12. **Arătați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, numărul $a=(5n+7)^2-(n-1)^2$ este divizibil cu 48.**

Scanned with OKEN Scanner

Soluție

Evident, $a=(5n+7+n-1)(5n+7-n+1)=(6n+6)(4n+8)=24(n+1)(n+2)$. Remarcând și faptul că $2|(n+1)(n+2)$ (căci $n+1$ și $n+2$ sunt de parități diferite), deducem că $48|a$.

13. Fie $m,\ n\in\mathbb{N}$, cu $m>n$ și numărul $a=\dfrac{(2m-1)^2-(2n-1)^2}{8}$. Arătați că $a\in\mathbb{N}$.

Soluție

Deoarece $(2m-1)^2-(2n-1)^2=(2m-1-2n+1)(2m-1+2n-1)=4(m-n)(m+n-1)$, rezultă că $a=\dfrac{(m-n)(m+n-1)}{2}$. Remarcând faptul că numerele $m-n$ și $m+n$ au aceeași paritate, deducem că numerele $m-n$ și $m+n-1$ sunt de parități diferite, ceea ce arată că $2|(m-n)(m+n-1)$. Prin urmare, $a\in\mathbb{Z}$.

14. Arătați că pătratul oricărui număr întreg este de forma $4n$ sau $8n+1$ ($n\in\mathbb{N}$).

Soluție

Fie $a\in\mathbb{Z}$ (oarecare). Atunci, $a=2k$ sau $a=2k+1$ ($k\in\mathbb{Z}$). Dacă $a=2k$, atunci $a^2=4k^2$, de unde $a=4n$ și $n\in\mathbb{N}$. Dacă $a=2k+1$, atunci $a^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1$. Deoarece $k(k+1)\geq 0$ (oricare ar fi $k\in\mathbb{Z}$) și $2|k(k+1)$, există $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $k(k+1)=2n$ și, deci, $a=8n+1$.

15. Arătați că, dacă numerele naturale a, b, c și d sunt pătrate perfecte consecutive, atunci și numărul $a+b+c+d-5$ este pătrat perfect.

Soluție

Întrucât a, b, c, d sunt pătrate perfecte consecutive, există $k\in\mathbb{Z}$ astfel încât $a=k^2$, $b=(k+1)^2$, $c=(k+2)^2$ și $d=(k+3)^2$. Atunci, $a+b+c+d-5=$ $=k^2+(k+1)^2+(k+2)^2+(k+3)^2-5=4k^2+12k+9=(2k+3)^2$. Astfel, cerința enunțului a fost îndeplinită.

16. Fie A și B două numere naturale care pot fi scrise fiecare ca o sumă de două pătrate de numere întregi. Arătați că și AB poate fi scris ca o sumă de două pătrate de numere întregi.

Soluție

Conform enunțului, există $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{Z}$ astfel încât $A=a^2+b^2$ și $B=c^2+d^2$. Atunci, $AB=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2=a^2c^2+b^2d^2+2abcd+b^2c^2+a^2d^2-2abcd=$ $=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$. Remarcând și faptul că $ac+bd,\ bc-ad\in\mathbb{Z}$, rezolvarea problemei este încheiată.

17. Fie $n\in\mathbb{N}$. Arătați că numărul $a=3n^2+38$ poate fi scris ca o sumă de trei pătrate de numere întregi distincte.

Soluție

Deoarece $a=(n^2+4n+4)+(n^2+6n+9)+(n^2-10n+25)=(n+2)^2+(n+3)^2+(n-5)^2$, iar $n+2\neq n+3$, $n+2\neq n-5$ și $n+3\neq n-5$ (oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$), cerința enunțului a fost îndeplinită.

18. Fie $a,\ b\in\mathbb{Z}^*$. Arătați că numărul $A=5a^2+9b^2+2(2a-3b)+2$ poate fi scris ca o sumă de trei pătrate de numere întregi.

Soluție

Evident, $A=4a^2+4a+1+9b^2-6b+1+a^2=(2a+1)^2+(3b-1)^2+a^2$. Remarcând și faptul că $2a+1\neq 0$ (oricare ar fi $a\in\mathbb{Z}$), $3b-1\neq 0$ (oricare ar fi $b\in\mathbb{Z}$) și $a\in\mathbb{Z}^*$, cerința enunțului a fost îndeplinită.

Scanned with OKEN Scanner

19. **Fie $a,\ b \in \mathbb{N}^*$ şi $b > 2a$. Arătaţi că numărul $A = 9a^2 + 5b^2 - 4a + 1$ poate fi scris ca o sumă de trei pătrate de numere naturale nenule.**

Soluţie

Remarcăm, mai întâi, că $A = 4a^2 - 4ab + b^2 + a^2 + 4ab + 4b^2 + 4a^2 - 4a + 1 = (2a - b)^2 + (2a + b)^2 + (2a - 1)^2 = (b - 2a)^2 + (2a + b)^2 + (2a - 1)^2$. Ţinând seama şi de faptul că $b - 2a \in \mathbb{N}^*$, $2a + b \in \mathbb{N}^*$ şi $2a - 1 \in \mathbb{N}^*$ (căci $a,\ b \in \mathbb{N}^*$ şi $b > 2a$), cerinţa enunţului a fost îndeplinită.

20. **Arătaţi că suma pătratelor a două numere naturale distincte şi de aceeaşi paritate poate fi scrisă ca suma pătratelor a patru numere naturale nenule.**

R.M.T. 1/1987

Soluţie

Fie $a,\ b \in \mathbb{N},\ a \neq b$, numerele considerate în enunţ. Pentru fixare, să presupunem că $a > b$. Deoarece a şi b au aceeaşi paritate, rezultă că $a + b$ şi $a - b$ sunt numere naturale pare nenule, deci există $m,\ n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a + b = 2m$ şi $a - b = 2n$. Atunci, $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 4m^2 + 4n^2$, ceea ce conduce la $a^2 + b^2 = 2m^2 + 2n^2 = m^2 + m^2 + n^2 + n^2$. Astfel, cerinţa enunţului a fost îndeplinită.

21. **Arătaţi că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, numărul $a = 29^n$ poate fi scris ca o sumă de două pătrate de numere naturale.**

Soluţie

Dacă $n = 0$, atunci $a = 1 = 0^2 + 1^2$.

Dacă $n = 1$, atunci $a = 29 = 4 + 25 = 2^2 + 5^2$.

Dacă $n = 2$, atunci $a = 841 = 400 + 441 = 20^2 + 21^2$.

Fie $n \in \mathbb{N}$ şi $n \geq 3$. Atunci, $n = 2k + 1$ sau $n = 2k + 2$ $(k \in \mathbb{N}^*)$. Dacă $n = 2k + 1$, atunci $a = 29^{2k+1} = 29 \cdot 29^{2k} = (2^2 + 5^2) \cdot 29^{2k} = 2^2 \cdot 29^{2k} + 5^2 \cdot 29^{2k} = (2 \cdot 29^k)^2 + (5 \cdot 29^k)^2$.

Dacă $n = 2k + 2$, atunci $a = 29^{2k+2} = 29^2 \cdot 29^{2k} = (20^2 + 21^2) \cdot 29^{2k} = 20^2 \cdot 29^{2k} + 21^2 \cdot 29^{2k} = (20 \cdot 29^k)^2 + (21 \cdot 29^k)^2$.

Ca urmare a celor stabilite anterior, cerinţa enunţului a fost îndeplinită.

22. **Arătaţi că restul împărţirii unui pătrat perfect la 7 poate fi doar unul dintre numerele : 0, 1, 2, 4.**

Soluţie

Fie $n \in \mathbb{N}$, iar k câtul şi r restul împărţirii lui n la 7 ($k \in \mathbb{N}$ şi $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$). Atunci, $n = 7k + r$, de unde $n^2 = 49k^2 + 14kr + r^2 = 7k(7k + 2r) + r^2$. Notând $k(7k + 2r) = m$ (evident, $m \in \mathbb{N}$), obţinem $n^2 = 7m + r^2$. Ţinând seama şi de faptul că $0^2 = 0,\ 1^2 = 1,\ 2^2 = 4,\ 3^2 = 1 \cdot 7 + 2,\ 4^2 = 2 \cdot 7 + 2,\ 5^2 = 3 \cdot 7 + 4,\ 6^2 = 5 \cdot 7 + 1$, deducem că restul împărţirii lui n^2 la 7 este unul dintre numerele : 0, 1, 2, 4.

23. **Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi numărul $a = n(n + 1) + 1$. Arătaţi că a nu poate fi pătrat perfect.**

Soluţie

Evident, $a = n^2 + n + 1$. Cum $n^2 + n + 1 > n^2$ şi $n^2 + n + 1 < n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$, rezultă că $n^2 < a < (n + 1)^2$. Remarcând şi faptul că n^2 şi $(n + 1)^2$ sunt pătrate perfecte consecutive, deducem că a nu poate fi pătrat perfect.

24. **Arătaţi că suma pătratelor a cinci numere întregi consecutive nu poate fi pătrat perfect.**

Soluţie

Fie $n - 2,\ n - 1,\ n,\ n + 1$ şi $n + 2$ $(n \in \mathbb{Z})$ numerele considerate în enunţul problemei.

Scanned with OKEN Scanner

iar a suma pătratelor lor. Deoarece $a=(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5(n^2+2)$, rezultă că $5|a$. Remarcând și faptul că $5\nmid n^2+2$ (căci $u(n^2+2)\in\{1,2,3,6,7,8\}$), deducem că $5^2\nmid a$. Având în vedere că orice pătrat perfect poate fi scris ca un produs de puteri (de numere naturale) cu exponenți numere naturale pare, conchidem că a nu poate fi pătrat perfect.

25. Fie $x\in\mathbb{R}$ și $0<x<1$. Determinați $x-\frac{1}{x}$, știind că $x^4+\frac{1}{x^4}=34$.

Soluție

Întrucât $x^4+\frac{1}{x^4}=34\Leftrightarrow x^4+\frac{1}{x^4}+2=36\Leftrightarrow\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=36\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=6\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}-2=4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=4$, rezultă că $x-\frac{1}{x}=-2$ sau $x-\frac{1}{2}=2$. Ținând seama și de faptul că $x-\frac{1}{x}<0$ (căci $0<x<1$ implică $\frac{1}{x}>1$), deducem că $x-\frac{1}{x}=-2$.

26. Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$. Arătați că, dacă $a+b+c=1$, atunci $(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2=2-2(ab+bc+ca)$.

Soluție

Din $a+b+c=1$ deducem că $b+c=1-a$, $c+a=1-b$ și $a+b=1-c$. Rezultă că $(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2=(1-a)^2+(1-b)^2+(1-c)^2=3-2(a+b+c)+a^2+b^2+c^2=$

$=3-2(a+b+c)+(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=3-2\cdot1+1^2-2(ab+bc+ca)=2-2(ab+bc+ca)$, cerința enunțului a fost îndeplinită.

27. Fie $x,y,z\in\mathbb{Q}$ astfel încât $x+y\neq0$ și $z=\frac{xy}{x+y}$. Arătați că numărul $a=x^2+y^2+z^2$ este pătratul unui număr rațional.

R.M.T. 2/1985

Soluție

Deoarece $z=\frac{xy}{x+y}$, rezultă că $xy-yz-zx=0$. Remarcând și faptul că $(x+y-z)^2=(x+y)^2-2(x+y)z+z^2=x^2+y^2+z^2+2(xy-yz-zx)$, deducem că $(x+y-z)^2=x^2+y^2+z^2$. Drept urmare, $a=(x+y-z)^2$. Cum $x+y-z\in\mathbb{Q}$, rezolvarea problemei este încheiată.

28. Fie $x,y\in\mathbb{R}$. Arătați că, dacă $3x^2+3y^2=10xy$ și $0<x<y$, atunci $\frac{x+y}{x-y}=-2$.

Soluție

Întrucât $3x^2+3y^2=10xy$, rezultă că $4x^2+4y^2-8xy=x^2+y^2+2xy$, ceea ce conduce la $4(x-y)^2=(x+y)^2$, de unde $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2=4$. Prin urmare, $\frac{x+y}{x-y}=-2$ sau $\frac{x+y}{x-y}=2$. Cum $\frac{x+y}{x-y}<0$ (căci $0<x<y$), convine numai $\frac{x+y}{x-y}=-2$.

29. Scrieți sub formă de produs fiecare dintre următoarele expresii:

a) $3xy^2-12xz^4$;

b) $81x^4-16y^4$;

c) $(x^2+9)^2-36x^2$;

d) $16(x+y)^2-9(x-2y)^2$;

e) $x^2-4xy+4y^2-9z^2$;

Scanned with OKEN Scanner

f) $x^2-6xy+9y^2-2x+6y$;

g) $x^2+y^2-z^2-9t^2+2(xy+3zt)$;

h) $\left(x^2+4y^2-9z^2\right)^2-16x^2y^2$.

Soluție

Se arată cu ușurință următoarele :

a) $3xy^2-12xz^4=3x\left(y^2-4z^4\right)=3x\left(y-2z^2\right)\left(y+2z^2\right)$;

b) $81x^4-16y^4=(3x)^4-(2y)^4=\left[(3x)^2-(2y)^2\right]\left[(3x)^2+(2y)^2\right]=(3x-2y)(3x+2y)\left(9x^2+4y^2\right)$;

c) $\left(x^2+9\right)^2-36x^2=\left(x^2+9\right)^2-(6x)^2=\left(x^2+9-6x\right)\left(x^2+9+6x\right)=(x-3)^2(x+3)^2$;

d) $16(x+y)^2-9(x-2y)^2=\left[4(x+y)\right]^2-\left[3(x-2y)\right]^2=\left[4(x+y)-3(x-2y)\right]\left[4(x+y)+3(x-2y)\right]=$
$=(x+10y)(7x-2y)$;

e) $x^2-4xy+4y^2-9z^2=(x-2y)^2-(3z)^2=(x-2y-3z)(x-2y+3z)$;

f) $x^2-6xy+9y^2-2x+6y=\left(x^2-6xy+9y^2\right)-(2x-6y)=(x-3y)^2-2(x-3y)=(x-3y)(x-3y-2)$;

g) $x^2+y^2-z^2-9t^2+2(xy+3zt)=x^2+2xy+y^2-\left(z^2-6zt+9t^2\right)=(x+y)^2-(z-3t)^2=$
$=(x+y-z+3t)(x+y+z-3t)$;

h) $\left(x^2+4y^2-9z^2\right)-16x^2y^2=\left(x^2+4y^2-9z^2\right)^2-(4xy)^2=\left(x^2+4y^2-9z^2-4xy\right)\left(x^2+4y^2-9z^2+4xy\right)=$
$=\left[(x-2y)^2-(3z)^2\right]\left[(x+2y)^2-(3z)^2\right]=(x-2y-3z)(x-2y+3z)(x+2y-3z)(x+2y+3z)$.

Astfel, rezolvarea problemei este încheiată.

30. Scrieți ca produs fiecare dintre următoarele expresii :

a) $x^4-2x^3+2x^2-2x+1$;

b) $x^2(y+1)+y^2(x+1)+2xy$;

c) $x\left(z^2-y^2\right)+y\left(z^2-x^2\right)$;

d) $2x^2-7x+5$;

e) $\left(3x^2-5x+1\right)^2-1$;

f) $\left(2x^2-4x-3\right)^2-9$;

g) $x^4+4x^3+3x^2-4x-4$;

h) $4x^4-12x^3+7x^2+3x-2$;

i) $\left(9x^2+12x+4\right)\left(9x^2-12x+4\right)-\left(4x^2-12x+9\right)\left(4x^2+12x+9\right)$.

Soluție

Se arată cu ușurință următoarele :

a) $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=\left(x^4+2x^2+1\right)-\left(2x^3+2x\right)=\left(x^2+1\right)^2-2x\left(x^2+1\right)=\left(x^2+1\right)\left(x^2+1-2x\right)=$
$=\left(x^2+1\right)(x-1)^2$;

b) $x^2(y+1)+y^2(x+1)+2xy=x^2y+x^2+xy^2+y^2+2xy=\left(x^2+y^2+2xy\right)+\left(x^2y+xy^2\right)=$
$=(x+y)^2+xy(x+y)=(x+y)(x+y+xy)$;

c) $x\left(z^2-y^2\right)+y\left(z^2-x^2\right)=xz^2-xy^2+yz^2-yx^2=\left(xz^2+yz^2\right)-\left(x^2y+xy^2\right)=z^2(x+y)-xy(x+y)=$
$=(x+y)\left(z^2-xy\right)$;

d) $2x^2-7x+5=2x^2-2x-5x+5=\left(2x^2-2x\right)-(5x-5)=2x(x-1)-5(x-1)=(x-1)(2x-5)$;

e) $\left(3x^2-5x+1\right)^2-1=\left(3x^2-5x\right)\left(3x^2-5x+2\right)=x(3x-5)(x-1)(3x-2)$ (căci $3x^2-5x+2=$
$=3x^2-3x-2x+2=3x(x-1)-2(x-1)=(x-1)(3x-2)$) ;

f) $\left(2x^2-4x-3\right)^2-9=\left(2x^2-4x\right)\left(2x^2-4x-6\right)=4x(x-2)\left(x^2-2x-3\right)=4x(x-2)(x+1)(x-3)$

Scanned with OKEN Scanner

(fiindcă $x^2-2x-3=x^2+x-3x-3=x(x+1)-3(x+1)=(x+1)(x-3)$);

g) $x^4+4x^3+3x^2-4x-4=x^4+4x^3+4x^2-x^2-4x-4=(x^4+4x^3+4x^2)-(x^2+4x+4)=$
$=x^2(x+2)^2-(x+2)^2=(x+2)^2(x^2-1)=(x+2)^2(x-1)(x+1)$;

h) $4x^4-12x^3+7x^2+3x-2=4x^4-12x^3+8x^2-x^2+3x-2=(4x^4-12x^3+8x^2)-(x^2-3x+2)=$
$=4x^2(x^2-3x+2)-(x^2-3x+2)=(x^2-3x+2)(4x^2-1)=(x-1)(x-2)(2x-1)(2x+1)$;

i) $(9x^2+12x+4)(9x^2-12x+4)-(4x^2-12x+9)(4x^2+12x+9)=(3x+2)^2(3x-2)^2-$
$-(2x-3)^2(2x+3)^2=[(3x+2)(3x-2)]^2-[(2x-3)(2x+3)]^2=(9x^2-4)^2-(4x^2-9)^2=$
$=(9x^2-4+4x^2-9)(9x^2-4-4x^2+9)=(13x^2-13)(5x^2+5)=65(x^2-1)(x^2+1)=$
$=65(x-1)(x+1)(x^2+1)$.

Astfel, rezolvarea problemei este încheiată.

31. Fie a, b două numere reale diferite. Arătaţi că, dacă $a(b^2+1)=b(a^2+1)$, atunci $ab=1$.

Soluţie

Evident, $a(b^2+1)=b(a^2+1)\Leftrightarrow ab^2+a=ba^2+b\Leftrightarrow ab^2-ba^2+a-b=0\Leftrightarrow ab(b-a)-(b-a)=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(b-a)(ab-1)=0$. Cum $b-a\neq 0$, ultima egalitate are loc dacă şi numai dacă $ab-1=0$, de unde $ab=1$.

32. Fie a, b, $c\in\mathbb{R}^*$. Arătaţi că, dacă $a(b+c)=2bc$ şi $b(c+a)=2ca$, atunci $a=b=c$.

Soluţie

Scăzând egalităţile din enunţ membru cu membru, obţinem $ca-bc=2bc-2ca$, de unde $3c(a-b)=0$, ceea ce, împreună cu $c\neq 0$, conduce la $a=b$. Făcând $a=b$ în prima dintre egalităţi din enunţ, aceasta devine $a(a+c)=2ca$, de unde $a+c=2c$ (căci $a\neq 0$) şi, deci, $a=c$. Drept urmare, $a=b=c$.

33. Arătaţi că, oricare ar fi $n\in\mathbb{Z}$, numărul $a=(n^2-5n+4)(n^2-5n+8)+4$ poate fi scris ca produsul pătratelor a două numere întregi consecutive.

Soluţie

Fie $k=n^2-5n$. Atunci, $a=(k+4)(k+8)+4=k^2+12k+36=(k+6)^2$. Deci, $a=(n^2-5n+6)^2$. Ţinând seama şi de faptul că $n^2-5n+6=n^2-3n-2n+6=$
$=n(n-3)-2(n-3)=(n-3)(n-2)$, deducem că $a=(n-3)^2(n-2)^2$, ceea ce arată că rezolvarea problemei este încheiată.

34. Fie x, $y\in\mathbb{R}$ şi numerele $a=9x^2+4y$, $b=6xy+4$. Arătaţi că există $x\in\mathbb{Q}$ astfel încât, oricare ar fi $y\in\mathbb{R}$, să avem $a=b$.

Soluţie

Deoarece $a=b\Leftrightarrow 9x^2+4y=6xy+4\Leftrightarrow(9x^2-4)-(6xy-4y)=0\Leftrightarrow(3x-2)(3x+2)-2y(3x-2)=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(3x-2)(3x-2y+2)=0$, rezultă că, pentru $x=\frac{2}{3}$, avem $a=b$ (oricare ar fi $y\in\mathbb{R}$).

35. Fie a, b, $c\in\mathbb{N}$ şi numărul $A=a^2-b^2-c^2-2bc$. Arătaţi că, dacă $a>2b$ şi $b>c$, atunci A este număr natural compus.

Soluţie

Remarcăm, mai întâi, că $A=a^2-(b^2+c^2+2bc)=a^2-(b+c)^2=(a+b+c)[a-(b+c)]$. Întrucât $b>c$, rezultă că $b\geq c+1$ (căci b, $c\in\mathbb{N}$), de unde $2b\geq b+c+1$. Totodată, $a>2b$, deci $a>b+c+1$, ceea ce implică $a\geq b+c+2$, de unde $a-(b+c)\geq 2$. Din condiţiile problemei deducem şi faptul că $a+b+c>3$. Ţinând seama de cele stabilite anterior, rezolvarea problemei este încheiată.

Scanned with OKEN Scanner

36. **a) Fie $n \in \mathbb{N}$ şi numărul $a = 2n^3 - 4n^2 + 5n - 10$. Determinaţi valorile lui n pentru care a este număr prim.**

b) Fie $n \in \mathbb{Z}$ şi numărul $a = 2n^4 - 3n^2 - 9$. Determinaţi valorile lui n pentru care a este număr prim.

Soluţie

a) Deoarece $a = (2n^3 - 4n^2) + (5n - 10) = 2n^2(n-2) + 5(n-2) = (n-2)(2n^2+5)$, a poate fi număr prim doar dacă unul dintre cei doi factori ai săi este 1, iar celălalt, număr prim. Cum $2n^2 + 5 \geq 5$ (oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$), numai factorul $n-2$ poate fi egal cu 1. Atunci, $n = 3$, iar $2n^2 + 5 = 23$. Ţinând seama de faptul că 23 este număr prim, deducem că $n = 3$ este soluţia problemei.
b) Întrucât $a = 2n^4 - 6n^2 + 3n^2 - 9 = 2n^2(n^2-3) + 3(n^2-3) = (n^2-3)(2n^2+3)$, a poate fi număr prim doar dacă unul dintre cei doi factori ai săi este 1, iar celălalt, număr prim. Având în vedere că $2n^2 + 3 \geq 3$ (oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$), numai factorul $n^2 - 3$ poate fi 1, ceea ce are loc dacă şi numai dacă $n = -2$ sau $n = 2$. Cum în fiecare dintre aceste situaţii $2n^2 + 3 = 11$, iar 11 este număr prim, rezultă că soluţiile problemei sunt -2 şi 2.

37. **Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x > y > 0$ şi $2(x^2 + y^2) = 5xy$. Calculaţi $\frac{x}{y}$ şi $\frac{x-y}{x+2y}$.**

Soluţie

Evident, $2(x^2 + y^2) = 5xy \Leftrightarrow 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4xy - xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow 2x(x-2y) - y(x-2y) = 0 \Leftrightarrow (x-2y)(2x-y) = 0$. Rezultă că $x = 2y$ sau $2x = y$, ceea ce arată că $\frac{x}{y} = 2$ sau $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$. Având în vedere că $\frac{x}{y} > 1$ (căci $x > y > 0$), conchidem că $\frac{x}{y} = 2$. Remarcând faptul că $\frac{x-y}{x+2y} = \frac{\frac{x}{y} - 1}{\frac{x}{y} + 2}$, deducem că $\frac{x-y}{x+2y} = \frac{1}{4}$.

38. **Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $a = \frac{36^n + 6^{n+1} + 8}{10(3 \cdot 6^{n-1} + 1)}$. Arătaţi că $a \in \mathbb{N}$.**

Soluţie

Deoarece $36^n + 6^{n+1} + 8 = 6^{2n} + 6 \cdot 6^n + 8 = 6^{2n} + 2 \cdot 6^n + 4 \cdot 6^n + 8 = 6^n(6^n + 2) + 4(6^n + 2) = (6^n + 2)(6^n + 4)$, iar $10(3 \cdot 6^{n-1} + 1) = 5(6^n + 2)$, rezultă că $a = \frac{6^n + 4}{5}$. Remarcând faptul că $u(6^n) = 6$ (căci $n \neq 0$), deducem că $u(6^n + 4) = 0$, ceea ce arată că $5 | 6^n + 4$. Deci, $a \in \mathbb{N}$.

39. **Fie triunghiul ABC şi $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Arătaţi că, dacă $ab(a+b) - bc(b+c) + ca(c+a) = a^3 + b^3 + c^3$, atunci $m(\hat{A}) = 90°$.**

Soluţie

Întrucât $ab(a+b) - bc(b+c) + ca(c+a) = a^2b + ab^2 - b^2c - bc^2 + c^2a + ca^2 = a^2(b+c) - b^2(c-a) - c^2(b-a)$, condiţia problemei conduce la $a^2(b+c) - b^2(c-a) - c^2(b-a) = a^3 + b^3 + c^3$, de unde $a^2(b+c) - a^3 = b^3 + b^2(c-a) + c^3 + c^2(b-a)$. Drept urmare, $a^2(b+c-a) = b^2(b+c-a) + c^2(b+c-a)$, ceea ce implică $a^2(b+c-a) = (b^2 + c^2)(b+c-a)$. Având în vedere că $b+c-a \neq 0$ (căci $b+c > a$), rezultă că $a^2 = b^2 + c^2$, de unde $m(\hat{A}) = 90°$.

Scanned with OKEN Scanner

40. **Fie** $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ **astfel încât** $a > b$ **şi** $a > c$. **Arătaţi că, dacă** a, b, c **sunt lungimile laturilor unui tringhi dreptunghic, atunci** $\frac{2bc}{a+b+c} \in \mathbb{N}^*$.

O.M., etapa judeţeană, Prahova, 1988

Soluţie

Deoarece $a > b$ şi $a > c$, rezultă că triunghiul dreptunghic menţionat în enunţ are ipotenuza de lungime a, deci $b^2 + c^2 = a^2$. Remarcând faptul că $2bc = (b+c)^2 - (b^2+c^2)$, deducem că $2bc = (b+c)^2 - a^2$, ceea ce conduce la $2bc = (b+c+a)(b+c-a)$, de unde $\frac{2bc}{a+b+c} = b+c-a$. Cum $b+c-a > 0$, iar $a, b, c \in \mathbb{N}$, rezultă că $b+c-a \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare, $\frac{2bc}{a+b+c} \in \mathbb{N}^*$.

41. **Fie triunghiul dreptunghic** ABC $(m(\hat{A}) = 90^\circ)$, **iar** $a = BC$, $b = CA$ **şi** $c = AB$. **Aflaţi lungimea înălţimii corespunzătoare ipotenuzei, ştiind că** $16(b^2+c^2) = b^4c^2 - 4b^4$.

Soluţie

Fie h lungimea înălţimii corespunzătoare ipotenuzei triunghiului considerat. Remarcând faptul că $16(b^2+c^2) = b^4c^2 - 4b^4 \Leftrightarrow 16b^2 + 16c^2 - b^4c^2 + 4b^4 = 0 \Leftrightarrow 4b^2(b^2+4) - c^2(b^4-16) = 0 \Leftrightarrow (b^2+4)(4b^2 - b^2c^2 + 4c^2) = 0$, deducem că $4(b^2+c^2) = b^2c^2$ (căci $b^2+4 \neq 0$). Având în vedere că $b^2+c^2 = a^2$ (fiindcă $m(\hat{A}) = 90^\circ$), conchidem că $4a^2 = b^2c^2$, de unde $\frac{bc}{a} = 2$, ceea ce conduce la $h = 2$ (fiindcă $h = \frac{bc}{a}$).

42. **Fie** $a, b, x, y \in \mathbb{R}^*$ **astfel încât** $x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y} = a$ **şi** $xy = b$. **Arătaţi că, dacă** $b \neq 1$, **atunci** $(b+1)^2 = a^2 b$.

Soluţie

Deoarece $x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y}$, rezultă că $x - y = \frac{x-y}{xy}$, de unde $xy(x-y) = x - y$, ceea ce conduce la $(x-y)(xy-1) = 0$. Cum $xy - 1 \neq 0$ (căci $xy = b$ şi $b \neq 1$), ultima egalitate are loc numai dacă $x = y$ şi, cum $xy = b$, rezultă că $x^2 = b$. Ţinând seama şi de faptul că $x + \frac{1}{x} = a$ implică $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = a^2$, deducem că $b + \frac{1}{b} + 2 = a^2$, de unde $(b+1)^2 = a^2 b$.

43. **Fie** $x, y, z \in \mathbb{R}$ **şi numerele** $a = 4x^2 + 4x + 6$, $b = 1 + 6y - 9y^2$, $c = 3z^2 - 6z + 2$. **Arătaţi că** $a + c \geq 2b$.

Soluţie

Întrucât $a = (4x^2 + 4x + 1) + 5 = (2x+1)^2 + 5$, rezultă că $a \geq 5$ (căci $(2x+1)^2 \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$). Remarcând faptul că $b = 2 - (9y^2 - 6y + 1) = 2 - (3y-1)^2$, deducem că $b \leq 2$ (fiindcă $(3y-1)^2 \geq 0$, oricare ar fi $y \in \mathbb{R}$). Întrucât $c = (3z^2 - 6z + 3) - 1 = 3(z-1)^2 - 1$, rezultă că $c \geq -1$. Drept urmare, $a + c \geq 4$ şi $2b \leq 4$, ceea ce implică $a + c \geq 2b$.

44. **Fie** $a = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{2}\sqrt{14 - 5\sqrt{3}}$. **Arătaţi că** $a \in \mathbb{N}$.

Soluţie

Deoarece $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} + 1} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$, $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2} =$

Scanned with OKEN Scanner

$= \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = |\sqrt{3}-\sqrt{2}| = \sqrt{3}-\sqrt{2}$ și $\sqrt{2}\sqrt{14-5\sqrt{3}} = \sqrt{28-10\sqrt{3}} = \sqrt{5^2-2\cdot 5\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2} =$
$= \sqrt{(5-\sqrt{3})^2} = |5-\sqrt{3}| = 5-\sqrt{3}$, rezultă că $a = \sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+ +5-\sqrt{3} = 4$. Deci, cerința enunțului a fost îndeplinită.

45. Fie x și y două numere reale astfel încât $x > y > 0$. Arătați că, dacă $x - y = 2(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ și $xy = 9$, atunci $x + y = 10$.

Soluție

Întrucât $x - y = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ (căci $x > 0$ și $y > 0$), rezultă că prima dintre egalitățile din enunț este echivalentă cu $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y}) = 2(\sqrt{x}+\sqrt{y})$, de unde $\sqrt{x}-\sqrt{y} = 2$. Atunci, $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 = 4$, ceea ce conduce la $x+y-2\sqrt{xy} = 4$. Cum $xy = 9$, rezultă că $x+y-6 = 4$, de unde $x+y = 10$.

46. Arătați că, dacă a, b, c și d sunt patru numere naturale consecutive, atunci $\sqrt{abcd+1} = bc-1$.

Soluție

Pentru fixare, să presupunem că $a < b < c < d$. Atunci, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = n$, $b = n+1$, $c = n+2$ și $d = n+3$. Prin urmare, $abcd+1 = n(n+1)(n+2)(n+3)+1 =$
$= [n(n+3)][(n+1)(n+2)]+1 = (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 = (n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1 =$
$= (n^2+3n+1)^2$, de unde $\sqrt{abcd+1} = n^2+3n+1$. Totodată, $bc-1 = (n+1)(n+2)-1 =$
$= n^2+3n+1$. Astfel, cerința enunțului a fost îndeplinită.

47. Determinați numerele naturale x, y și z cu proprietatea că :

$$\sqrt{x^2-6x+34}+\sqrt{y^2+2y+10}+\sqrt{z^2+6z+25} = 12.$$

Soluție

Deoarece $x^2-6x+34 = (x-3)^2+25 \geq 25$ (cu egalitate dacă și numai dacă $x = 3$), $y^2+2y+10 = (y+1)^2+9 \geq 9$ (cu egalitate dacă și numai dacă $y = -1$) și $z^2+6z+25 = (z+3)^2+16 \geq 16$ (cu egalitate dacă și numai dacă $z = -3$), rezultă că $\sqrt{x^2-6x+34}+\sqrt{y^2+2y+10}+\sqrt{z^2+6z+25} \geq \sqrt{25}+\sqrt{9}+\sqrt{16} = 12$ (cu egalitate dacă și numai dacă $x = 3$, $y = -1$ și $z = -3$). Prin urmare, egalitatea din enunț are loc atunci și numai atunci când $x = 3$, $y = -1$ și $z = -3$.

48. Fie numerele $a = \sqrt{5}+2\sqrt{3}$ și $b = \sqrt{7}+\sqrt{10}$. Fără a extrage rădăcina pătrată, arătați că $a < b$.

Soluție

Întrucât $a^2 = 17+4\sqrt{15}$, $b^2 = 17+2\sqrt{70}$, iar $4\sqrt{15} = 2\sqrt{60} < 2\sqrt{70}$, rezultă că $a^2 < b^2$, de unde $a^2-b^2 < 0$, ceea ce conduce la $(a-b)(a+b) < 0$. Cum $a+b > 0$, rezultă că $a-b < 0$, de unde $a < b$.

49. Fără a extrage rădăcina pătrată, scrieți în ordine crescătoare numerele : $a = 3\sqrt{2}+\sqrt{30}$, $b = 6+2\sqrt{3}$ și $c = 2\sqrt{2}+2\sqrt{10}$.

Soluție

Se arată cu ușurință că $a^2 = 48+12\sqrt{15}$, $b^2 = 48+24\sqrt{3}$ și $c^2 = 48+16\sqrt{5}$. Deoarece $2\sqrt{3} = \sqrt{12} < \sqrt{15}$, rezultă că $24\sqrt{3} < 12\sqrt{15}$, ceea ce implică $48+24\sqrt{3} < 48+2\sqrt{15}$. Prin urmare, $b^2 < a^2$, de unde $b < a$. Remarcând faptul că $2\sqrt{5} = \sqrt{20} < \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, deducem că $16\sqrt{5} < 24\sqrt{3}$, ceea ce conduce la $48+16\sqrt{5} < 48+24\sqrt{3}$. În consecință, $c^2 < b^2$, de unde $c < b$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $c < b < a$.

Scanned with OKEN Scanner

50. Fie $x \in \mathbb{R}^*$ şi $y = \sqrt{x^2 + 3x + 4}$. Arătaţi că $x(x - y + 2) > 0$.

Soluţie

Fie $x > 0$. Remarcând faptul că $y = \sqrt{(x+2)^2 - x}$, deducem că, în cazul considerat, $y < \sqrt{(x+2)^2}$, ceea ce conduce la $y < |x+2|$, de unde $y < x+2$. Drept urmare, $x - y + 2 > 0$ şi, deci, $x(x-y+2) > 0$.

Fie $x < 0$. Întrucât $y = \sqrt{(x+2)^2 - x}$, rezultă că $y > |x+2|$. Ţinând seama şi de faptul că $|x+2| \geq x+2$ (oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$), deducem că $y > x+2$, de unde $x - y + 2 < 0$ şi, deci, $x(x-y+2) > 0$.

51. Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că, dacă diferenţa dintre media aritmetică şi media geometrică a numerelor a şi b este 1, atunci $\frac{a}{2}$ şi $\frac{b}{2}$ sunt pătratele a două numere naturale consecutive.

O.M., etapa judeţeană, Suceava, 1992

Soluţie

Deoarece egalitatea $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ are loc dacă şi numai dacă $a = b$, rezultă că, în cazul considerat în enunţ, $a \neq b$. Pentru fixare, să presupunem că $a < b$. Din faptul că $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = 1$ deducem că $a + b - 2\sqrt{ab} = 2$, ceea ce conduce la $(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2 = 2$, de unde $\sqrt{b} - \sqrt{a} = \sqrt{2}$ (căci $b > a$ implică $\sqrt{b} > \sqrt{a}$). Drept urmare, $\sqrt{b} = \sqrt{a} + \sqrt{2}$. Ridicând la pătrat ambii membri ai ultimei egalităţi, obţinem $b = a + 2 + 2\sqrt{2a}$. Cum $a, b \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $\sqrt{2a} \in \mathbb{N}^*$, ceea ce are loc dacă şi numai dacă există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sqrt{2a} = k$, de unde $2a = k^2$. Evident, ultima egalitate impune $2 | k^2$, condiţie îndeplinită atunci când $k = 2n$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Ţinând seama de cele stabilite anterior, deducem că $\frac{a}{2} = n^2$ şi $\frac{b}{2} = n^2 + 1 + 2n = (n+1)^2$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

52. Fie $a, b \in \mathbb{N}$. Arătaţi că, dacă $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{N}$, atunci $\sqrt{a} \in \mathbb{N}$ şi $\sqrt{b} \in \mathbb{N}$.

Soluţie

Dacă $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 0$, atunci $\sqrt{a} = 0$ şi $\sqrt{b} = 0$ (căci $\sqrt{a} \geq 0$ şi $\sqrt{b} \geq 0$), deci, în acest caz, $\sqrt{a} \in \mathbb{N}$ şi $\sqrt{b} \in \mathbb{N}$.

Fie $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq 0$. Atunci, există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sqrt{a} + \sqrt{b} = n$. Rezultă că $\sqrt{a} = n - \sqrt{b}$, de unde $a = n^2 + b - 2n\sqrt{b}$, ceea ce conduce la $\sqrt{b} = \frac{n^2 + b - a}{2n}$. Ţinând seama şi de faptul că $\frac{n^2 + b - a}{2n} \in \mathbb{Q}$ (fiindcă $a, b, n \in \mathbb{N}$), deducem că $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$. Cum $b \in \mathbb{N}$, conchidem că $\sqrt{b} \in \mathbb{N}$. Analog, arătăm că şi $\sqrt{a} \in \mathbb{N}$.

53. Arătaţi că nu există $a, b \in \mathbb{Q}$ astfel încât $\sqrt{6} = a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$.

Soluţie

Să presupunem, din contra, că există $a, b \in \mathbb{Q}$ astfel încât $\sqrt{6} = a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$. Ridicând la pătrat ambii membri ai ultimei egalităţi, obţinem $6 = 2a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{6}$, de unde $2ab\sqrt{6} = 6 - 2a^2 - 3b^2$.

Dacă $ab \neq 0$, atunci $\sqrt{6} = \frac{6 - 2a^2 - 3b^2}{2ab}$. Cum această egalitate nu poate avea loc

Scanned with OKEN Scanner

(căci $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$, iar $\frac{6-2a^2-3b^2}{2ab} \in \mathbb{Q}$), situația considerată nu este posibilă.

Dacă $a=0$, atunci $0=6-3b^2$, de unde $b^2=2$. Întrucât ultima egalitate nu poate avea loc (fiindcă nu există nici un număr rațional al cărui pătrat să fie 2), nici această situație nu este posibilă.

Dacă $b=0$, atunci $0=6-2a^2$, de unde $a^2=3$. Deoarece nu există nici un număr rațional al cărui pătrat să fie 3, ultima egalitate nu poate avea loc.

Deci, nici situația considerată nu este posibilă.

Ca urmare a celor stabilite anterior, presupunerea făcută inițial este falsă.

54. Determinați valorile lui $a \in \mathbb{Q}$ pentru care $\sqrt{a+\sqrt{2}}-\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Soluție

Condiția din enunț este îndeplinită dacă și numai dacă există $r \in \mathbb{Q}$ astfel încât $\sqrt{a+\sqrt{2}}-\sqrt{2}=r$. Atunci, $\sqrt{a+\sqrt{2}}=r+\sqrt{2}$, de unde $a+\sqrt{2}=r^2+2\sqrt{2}r+2$, ceea ce conduce la $(1-2r)\sqrt{2}=r^2-a+2$. Dacă $1-2r \neq 0$, atunci $\sqrt{2}=\frac{r^2-a+2}{1-2r}$.

Cum $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, iar $\frac{r^2-a+2}{1-2r} \in \mathbb{Q}$ (căci $a \in \mathbb{Q}$ și $r \in \mathbb{Q}$), ultima egalitate nu este posibilă. Rezultă că $1-2r=0$, ceea ce implică $r^2-a+2=0$. Deci, $r=\frac{1}{2}$ și $a=\frac{9}{4}$.

55. Determinați numerele prime a, b și numărul întreg c, știind că $3\sqrt{a}+5\sqrt{b}=c\sqrt{2}$.

O.M., etapa locală, București, 1992

Soluție

Ridicând la pătrat ambii membri ai egalității considerate în enunțul problemei, obținem $9a+25b+30\sqrt{ab}=2c^2$. Întrucât $2c^2 \in \mathbb{N}$ și $9a+25b \in \mathbb{N}$, ultima egalitate este posibilă doar dacă $\sqrt{ab} \in \mathbb{N}$, ceea ce impune ca numărul ab să fie pătrat perfect. Remarcând faptul că a și b sunt numere prime, ultima cerință este îndeplinită dacă și numai dacă $a=b$. Atunci, egalitatea stabilită anterior devine $32a=c^2$, ceea ce este posibil numai dacă $a=2$ (căci a este număr prim). Deducem imediat că $b=2$, iar $c \in \{-8, 8\}$.

56. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x^2+y^2=3$. Arătați că $\sqrt{x^4+12y^2}+\sqrt{y^4+12x^2}=9$.

Soluție

Deoarece $x^2+y^2=3$, rezultă că $\sqrt{x^4+12y^2}+\sqrt{y^4+12x^2}=\sqrt{x^4+12(3-x^2)}+$
$+\sqrt{y^4+12(3-y^2)}=\sqrt{(x^2-6)^2}+\sqrt{(y^2-6)^2}=|x^2-6|+|y^2-6|=6-x^2+6-y^2=12-(x^2+y^2)=9$
(evident, $x^2+y^2=3$ implică $x^2 \leq 3$ și $y^3 \leq 3$).

57. Fie $x \in \mathbb{R}$ și $a=\frac{\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}}{\sqrt{4x^2-4x+1}+\sqrt{4x^2-20x+25}}$. Arătați că, dacă $1 \leq x \leq 2$, atunci $a \in \mathbb{Q}$.

Soluție

Întrucât $\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|=x-1$ (căci $x \geq 1$), $\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-3)^2}=$
$=|x-3|=3-x$ (fiindcă $x \leq 2$), $\sqrt{4x^2-4x+1}=\sqrt{(2x-1)^2}=|2x-1|=2x-1$ și
$\sqrt{4x^2-20x+25}=\sqrt{(2x-5)^2}=|2x-5|=5-2x$, rezultă că $a=\frac{x-1+3-x}{2x-1+5-2x}=\frac{1}{2}$. Cum $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, cerința enunțului a fost îndeplinită.

58. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$. Arătați că $\frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d} \in \mathbb{Q}$ dacă și numai dacă $bc-ad=0$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție

Evident, $\frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d}=\frac{(a\sqrt{2}+b)(c\sqrt{2}-d)}{2c^2-d^2}=\frac{2ac-bd}{2c^2-d^2}+\frac{bc-ad}{2c^2-d^2}\sqrt{2}$, iar $\frac{2ac-bd}{2c^2-d^2}\in\mathbb{Q}$ și $\frac{bc-ad}{2c^2-d^2}\in\mathbb{Q}$ (căci $a, b, c, d\in\mathbb{N}^*$). Ținând seama și de faptul că produsul dintre un număr rațional nenul și un număr irațional este număr irațional, iar suma dintre un număr rațional și un număr irațional este un număr irațional, deducem că cerința ca $\frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d}\in\mathbb{Q}$ este îndeplinită dacă și numai dacă $\frac{bc-ad}{2c^2-d^2}=0$, ceea ce conduce la $bc-ad=0$.

59. **Fie $x, y\in\mathbb{R}$. Arătați că, dacă $x^2+y^2=6xy$ și $x>y>0$, atunci $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\sqrt{2}-1$.**

Soluție

Remarcăm, mai întâi, că $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y}$. Pe de altă parte, $x^2+y^2=6xy\Rightarrow x^2+y^2+2xy=8xy\Rightarrow(x+y)^2=8xy\Rightarrow x+y=2\sqrt{2}\sqrt{xy}$. Totodată, $x^2+y^2=6xy\Rightarrow x^2+y^2-2xy=4xy\Rightarrow(x-y)^2=4xy\Rightarrow x-y=2\sqrt{xy}$ (căci $x>y>0$). Prin urmare, $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{xy}-2\sqrt{xy}}{2\sqrt{xy}}=\sqrt{2}-1$.

60. **a) Fie $x, y\in\mathbb{R}_+$. Arătați că $\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\sqrt{2(x+y)}$, cu egalitate dacă și numai dacă $x=y$.**

b) Demonstrați inegalitatea $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{49}<245$.

Soluție

a) Întrucât $x, y\in\mathbb{R}_+$, rezultă că $2\sqrt{xy}\le x+y$, ceea ce conduce la $x+y+2\sqrt{xy}\le 2(x+y)$, de unde $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\le 2(x+y)$ și, deci, $\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\sqrt{2(x+y)}$. Remarcând faptul că relația $2\sqrt{xy}\le x+y$ are loc ca egalitate dacă și numai dacă $x=y$, deducem că și relația din enunț are loc ca egalitate atunci și numai atunci când $x=y$.

b) Evident, $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{49}=(1+\sqrt{49})+(\sqrt{2}+\sqrt{48})+\ldots+(\sqrt{24}+\sqrt{26})+\sqrt{25}$. Având în vedere cele stabilite la a), deducem că
$1+\sqrt{49}<\sqrt{2(1+49)}=\sqrt{100}=10$, $\sqrt{2}+\sqrt{48}<\sqrt{2(2+48)}=10$, ..., $\sqrt{24}+\sqrt{26}<\sqrt{2(24+26)}=10$.
Drept urmare, $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{49}<\underbrace{10+10+\ldots+10}_{\text{24 de termeni}}+5=10\cdot 24+5=245$.

PROBLEME PROPUSE

1. Fie $x\in\mathbb{R}$ și $a=x^2+2x-3$, $b=3x^2-5x+2$, $c=-2x^2+3x+1$. Calculați: $b+c$, $b-a$, $a+b+c$, $a-(b+c)$ și $b-(c-a)$.

2. Fie $x\in\mathbb{R}$ și $a=2x-1$, $b=x^2+x-3$, $c=-2x^2+x-2$. Calculați: ac, $bc-ab$, $(b+c)a$ și $(a-b)(b+c)$.

3. Fie $x\in\mathbb{R}$ și $a=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$. Arătați că, dacă $x^2+5x+2=0$, atunci $a=8$.

4. Folosind formule de calcul prescurtat, calculați:
a) $(3x-1)^2+5(x+1)^2-4(2x-3)^2+2x(x+1)$;

Scanned with OKEN Scanner

b) $(2x-1)(2x+1)-3(x+2)^2+2(x+3)^2-5(x-1)(x+1)$;
c) $(x+2)^2(x-2)-(3x+1)(3x-1)(x+1)+8x(x-1)^2$.

5. Fie $a=3^2+5^2+7^2+\ \ldots\ +101^2$ și $b=2^2+4^2+6^2+\ \ldots\ +100^2$. Calculați $a-b$.

6. Arătați că, oricare ar fi n număr natural impar, numărul $a=(3n+5)^2-(n-1)^2$ este divizibil cu 64.

7. Fie $m,\ n\in\mathbb{N}$, cu $m>n$ și numărul $a=\dfrac{(3m-2)^2-(3n-2)^2}{12}$. Arătați că, dacă m și n au aceeași paritate, atunci $a\in\mathbb{N}$.

8. Arătați că orice număr natural impar poate fi scris ca diferența pătratelor a două numere întregi.

9. a) Stabiliți câte numere naturale se găsesc între două pătrate perfecte consecutive.
b) Între două pătrate perfecte consecutive se găsesc o sută de numere naturale. Aflați cele două pătrate perfecte.

10. Fie $n\in\mathbb{N}$. Arătați că numărul $a=3n^2+8$ poate fi scris ca o sumă de trei pătrate de numere întregi distincte.

11. Fie $a,\ b\in\mathbb{N}^*$. Arătați că numărul $A=4a^2+10b^2-4(a-3b)+5$ poate fi scris ca o sumă de trei pătrate de numere naturale nenule.

12. Fie $a,\ b\in\mathbb{N}^*$ și $a>2b$. Arătați că numărul $A=11a^2+8b^2-6a+1$ poate fi scris ca o sumă de trei pătrate de numere naturale nenule.

13. Fie $A,\ B,\ C$ trei numere naturale cu proprietatea că fiecare dintre ele poate fi scris ca o sumă de două pătrate de numere întregi. Arătați că și numărul ABC poate fi scris ca o sumă de două pătrate de numere întregi.

14. Arătați că, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, numărul $a=10^n$ poate fi scris ca o sumă de două pătrate de numere naturale.

15. Arătați că restul împărțirii unui pătrat perfect la 9 poate fi doar unul dintre numerele: $0,\ 1,\ 4$ și 7.

16. Fie $a,\ x,\ y,\ z\in\mathbb{R}$. Arătați că, dacă $x+3y+5z=18a$, atunci $a^2+(x-a)^2+$ $+(y-3a)^2+(z-5a)^2=x^2+y^2+z^2$.

17. Fie $x\in\mathbb{R}$ și $a=\dfrac{15x^2}{x^4+x^2+1}$. Arătați că, dacă $x^2-4x+1=0$, atunci $a=1$.

18. a) Fie $x\in\mathbb{R}^*$. Aflați $x+\dfrac{1}{x}$, știind că $x^2+\dfrac{1}{x^2}-6\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+11=0$.

b) Fie $x\in\mathbb{R}$ și $x>1$. Calculați $x-\dfrac{1}{x}$, știind că $x^4+\dfrac{1}{x^4}=119$.

19. Fie $a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z\in\mathbb{R}^*$. Arătați că, dacă $x=2bc+\dfrac{3}{a}$, $y=2ca+\dfrac{3}{b}$, $z=2ab+\dfrac{3}{c}$ și $ax+by+cz=3$, atunci $xyz=-1$.

20. Fie $x,\ y\in\mathbb{R}$. Arătați că, dacă $x+y=10$ și $2xy=1$, atunci

$$x^9+y^9-20\left(x^{10}+y^{10}\right)+2\left(x^{11}+y^{11}\right)=0.$$

21. Scrieți sub formă de produs fiecare dintre următoarele expresii:

a) $12x^3-75x$; b) x^4-16y^4; c) $\left(x^2+4\right)^2-16x^2$;

d) $9(3x-y)^2-16(2x-3y)^2$; e) $4x^2-12xy+9y^2-4z^2$;

Scanned with OKEN Scanner

f) $9x^2 - 6xy + y^2 - 6x + 2y$; g) $x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 9t^2 + 4(xy - 3zt)$;

h) $(x^2 + 4y^2 - z^2)^2 - 16x^2y^2$.

22. Scrieți sub formă de produs fiecare dintre următoarele expresii:

a) $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$; b) $(x^2y^2 + 1)^2 - (x^2 + y^2)^2$;

c) $5x^2 - 7x + 2$; d) $(3x^2 - 7x + 2)^2 - 4$;

e) $x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 6x - 9$.

23. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și $a \neq b$. Arătați că, dacă $a(b^2 - 1) = b(a^2 - 1)$, atunci $ab = -1$.

24. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ și numerele $a = 9x^2 - 12y$, $b = 9xy + 16$. Arătați că există $x \in \mathbb{Q}$ astfel încât, oricare ar fi $y \in \mathbb{R}$, să aibă loc egalitatea $a = b$.

25. Fie $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a > b > c$ și numărul $A = a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$. Arătați că $A \in \mathbb{N}^*$ și că A este număr compus.

26. Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care $a = n^3 - n^2 + 3n - 3$ este număr prim.

27. Fie $n \in \mathbb{N}$ și $a = 4n^4 - 12n^3 + 15n^2 - 9n + 9$.

a) Arătați că $a = (n^2 - 3n + 3)(4n^2 + 3)$.

b) Determinați valorile lui n pentru care a este număr prim.

28. Determinați valorile lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $a = \frac{n(n+3)}{2} - 2$ este număr prim.

29. Fie $x \in \mathbb{Z}$ și $a = x(x-3)(x^2 - 3x + 4) + 4$. Arătați că a poate fi scris ca produsul pătratelor a două numere întregi consecutive.

30. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $0 < x < y$ și $3(x^2 + y^2) = 10xy$. Calculați $\frac{x}{y}$ și $\frac{x-y}{3x+y}$.

31. Fie n un număr natural par nenul și $a = \frac{16^n + 5 \cdot 4^n + 4}{5(4^n + 1)}$. Arătați că a este număr natural par.

32. Fie $x, y \in \mathbb{Q}, y \neq 0$ și $a = \frac{x^2}{y^2} + \frac{x^2+1}{y^2+1} + \frac{x^2+2}{y^2+2} + \ldots + \frac{x^2+99}{y^2+99}$. Arătați că $a = 100$ dacă și numai dacă $|x| = |y|$.

O.M., etapa locală, Iași, 2000

33. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ și numerele $a = 9x^2 - 6x + 5$, $b = y^2 - 4y + 3$, $c = 2 + 4z - 4z^2$. Arătați că $a + b \geq c$.

34. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$. Arătați că, dacă $x + y + z = 0$, atunci $x^2 - yz \geq 0$.

35. Fie a, b două cifre impare consecutive. Determinați $\overline{ab}$, știind că $\overline{aa}^2 + \overline{ab}^2 - \overline{aa} \cdot \overline{ab} = 147$.

Indicație. În rezolvarea problemei se va ține seamă de faptul că $\overline{aa}^2 + \overline{ab}^2 - \overline{aa} \cdot \overline{ab} = (\overline{aa} - \overline{ab})^2 + \overline{aa} \cdot \overline{ab}$ și că $|a - b| = 2$.

36. Arătați că: a) $(2 - \sqrt{3})^2(7 + 4\sqrt{3}) = 1$; b) $(3 - 2\sqrt{2})^2 = (17 + 12\sqrt{2})^{-1}$.

Scanned with OKEN Scanner

37. Arătați că $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{40}-4)=24$.

38. Fie $a=2+\sqrt{3}$, $b=\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ și $c=\left(\sqrt{5}-\sqrt{2\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2\sqrt{3}}\right)$. Arătați că $\sqrt{a+b+c}\in\mathbb{N}$.

39. Arătați că $\frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}-\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}=\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

40. Arătați că $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}}\in\mathbb{N}$.

41. Arătați că $\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

42. Arătați că $\sqrt{(\overline{ab}-1)(\overline{ab}-3)+1}\in\mathbb{N}$, oricare ar fi cifrele a și b $(a\neq 0)$.

43. Arătați că $\sqrt{\overline{a4}\cdot\overline{a6}+1}\in\mathbb{N}$, oricare ar fi cifra a $(a\neq 0)$.

44. Fără a extrage rădăcina pătrată, stabiliți care dintre numerele $a=2\sqrt{6}$ și $b=\sqrt{5}+\sqrt{7}$ este mai mare.

45. Fără a extrage rădăcina pătrată, stabiliți care dintre numerele $a=\sqrt{5}+3\sqrt{2}$ și $b=3+\sqrt{14}$ este mai mare.

46. a) Arătați că $\sqrt{3}-\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.
b) Demonstrați că $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\notin\mathbb{Q}$.

47. Fie $x,\ y\in\mathbb{R}$. Arătați că, dacă $x^2+y^2=2$, atunci $\sqrt{x^4+8y^2}+\sqrt{y^4+8x^2}=6$.

48. Determinați $x,\ y,\ z\in\mathbb{R}$ astfel încât $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{9y^2+6y+10}+\sqrt{4z^2-12z+34}=10$.

49. Fie $x\in\mathbb{N}$ și $a=24+2x-x^2$. Determinați valorile lui x pentru care $\sqrt{a}\in\mathbb{N}$.

50. Arătați că $\sqrt{1}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\ \ldots\ +\sqrt{99}<375$.

RĂSPUNSURI

1. $a+b+c=2x^2$, $b-a=2x^2-7x+5$, $a-(b+c)=4x-6$, $b-(c-a)=6x^2-6x-2$ **2.** $ac=-4x^3-4x^2-5x+2$, $bc-ab=-2x^4-3x^3+4x^2+2x+3$, $(b+c)a=-2x^3+5x^2-12x+5$, $(a-b)(b-c)=-2x^4-3x^3+5x^2-x-10$ **4.** a) $54x-30$; b) $-2x^2+10$ **5.** $a-b=5150$ **9.** a) dacă n^2 și $(n+1)^2$ sunt cele două pătrate perfecte consecutive, atunci între ele se află $2n$ numere naturale; b) 50^2 și 51^2 **18.** a) $x+\frac{1}{x}=3$; b) $x-\frac{1}{x}=3$ **21.** a) $3x(2x-5)(2x+5)$; b) $(x-2y)(x+2y)\left(x^2+4y^2\right)$; c) $(x-2)^2(x+2)^2$; d) $(17x-15y)(x+9y)$; e) $(2x-3y-2z)(2x-3y+2z)$; f) $(3x-y)(3x-y-2)$; g) $(x+2y-2z-3t)(x+2y+2z+3t)$; h) $(x-2y-z)(x-2y+z)(x+2y-z)(x+2y+z)$ **22.** a) $(x-1)^3(x+1)$; b) $(x-1)(x+1)(y-1)(y+1)\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)$; c) $(x-1)(5x-2)$; d) $x(x-1)(3x-4)(3x-7)$; e) $(x-1)(x+1)(x+3)^2$; f) $(x-1)(x+1)(x-3)^2$ **26.** $n=2$ **27.** b) $n\in\{1,2\}$ **28.** $n\in\{2,3\}$ **30.** $\frac{x}{y}=\frac{1}{3}$. $\frac{x-y}{3x+y}=-\frac{1}{3}$ **35.** $\overline{ab}=13$ **45.** $a>b$ **48.** $x=1$, $y=-\frac{1}{3}$ și $z=\frac{3}{2}$ **49.** $x\in\{1,4,5,6\}$.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL IV

ECUAȚII. SISTEME DE ECUAȚII

PROBLEME REZOLVATE

1. **Rezolvați ecuațiile:**

a) $x+3x+5x+\ldots+19x+21=121x$;

b) $x-2x+3x-4x+\ldots+19x-20x+21x=22$.

Soluție

a) Întrucât $x+3x+5x+\ldots+19x=(x+19x)+(3x+17x)+\ldots+(9x+11x)=\underbrace{20x+20x+\ldots+20x}_{\text{5 termeni}}=$

$=(20x)\cdot 5=100x$, ecuația din enunț conduce la $100x+21=121x$, de unde $21x=21$ și, deci, $x=1$.

b) Deoarece $x-2x+3x-4x+\ldots+19x-20x=(x-2x)+(3x-4x)+\ldots+(19x-20x)=$

$=\underbrace{-x+(-x)+\ldots+(-x)}_{\text{10 termeni}}=-10x$, ecuația considerată conduce la $-10x+21x=22$,

de unde $11x=22$ și, deci, $x=2$.

2. **Rezolvați ecuațiile:**

a) $7(2x-5)-[5(7x-2)-2(5x-7)]+61=0$; **(1)**

b) $23+2(3x-5)-\{8x-2(7x-5)-3[3(1-x)-2x]\}=0$. **(2)**

Soluție

a) Deoarece $(1)\Leftrightarrow 14x-35-(35x-10-10x+14)+61=0\Leftrightarrow 14x-35-(25x+4)+61=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 14x-35-25x-4+61=0\Leftrightarrow 11x=22$, iar 2 este soluția ultimei ecuații, rezultă că 2 este și soluția ecuației (1).

b) Remarcând faptul că $(2)\Leftrightarrow 23+6x-10-[8x-14x+10-3(3-3x-2x)]=0\Leftrightarrow 13+6x-$

$-[10-6x-3(3-5x)]=0\Leftrightarrow 13+6x-(10-6x-9+15x)=0\Leftrightarrow 13+6x-(1+9x)=0\Leftrightarrow 13+$

$+6x-1-9x=0\Leftrightarrow 3x=12$, iar 4 este soluția ultimei ecuații, deducem că 4 este și soluția ecuației (2).

3. **Rezolvați ecuațiile:**

a) $12+(x-3)(2x-5)-2(x-1)^2=4(x-2)$; **(1)**

b) $(3x-1)^2-5(2x+1)^2+3(2x-1)(2x+1)=(x-1)^2$; **(2)**

c) $(x+1)^2+(x+3)^2+(x+5)^2+(x+7)^2+(x+9)^2=x^2+(x+2)^2+(x+4)^2+(x+6)^2+(x+8)^2+10$; **(3)**

d) $(x\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(x\sqrt{3}-\sqrt{2})^2-(x\sqrt{5}+1)(x\sqrt{5}-1)+x(3x+2)=3x^2-2(x-7)$. **(4)**

Soluție

a) Întrucât $(1)\Leftrightarrow 12+2x^2-6x-5x+15-2(x^2-2x+1)=4x-8\Leftrightarrow 2x^2-11x+27-2x^2+4x-2=$

$=4x-8\Leftrightarrow 25-7x=4x-8\Leftrightarrow 11x=33\Leftrightarrow x=3$, rezultă că 3 este soluția ecuației (1).

b) Remarcând faptul că $(2)\Leftrightarrow 9x^2-6x+1-5(4x^2+4x+1)+3(4x^2-1)=x^2-2x+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9x^2-6x+1-20x^2-20x-5+12x^2-3=x^2-2x+1\Leftrightarrow x^2-26x-7=x^2-2x+1\Leftrightarrow -24x=$

Scanned with OKEN Scanner

$= 8 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$, deducem că $-\frac{1}{3}$ este soluția ecuației (2).

c) Deoarece $(3) \Leftrightarrow \left[(x+1)^2 - x^2\right] + \left[(x+3)^2 - (x+2)^2\right] + \left[(x+5)^2 - (x+4)^2\right] + \left[(x+7)^2 - (x+6)^2\right] + \left[(x+9)^2 - (x+8)^2\right] = 10 \Leftrightarrow (2x+1) + (2x+5) + (2x+9) + (2x+13) + (2x+17) = 10 \Leftrightarrow 10x + 45 = 10 \Leftrightarrow 10x = -35 \Leftrightarrow x = -3{,}5$, rezultă că $-3{,}5$ este soluția ecuației (3).

d) Ținând seama de faptul că $(4) \Leftrightarrow 2x^2 + 2x\sqrt{6} + 3 + 3x^2 - 2x\sqrt{6} + 2 - 5x^2 + 1 + 3x^2 + 2x = 3x^2 - 2x + 14 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 3x^2 + 2x + 6 = 3x^2 - 2x + 14 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2$, deducem că 2 este soluția ecuației (4).

4. Rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{x-1}{3} + \frac{3x}{4} - \frac{x-2}{6} + \frac{x}{8} - \frac{5x+3}{12} = 1;$ **(1)**

b) $\frac{2(11x-5)}{5} - \frac{7x}{10} + \frac{8(x+10)}{15} = 24\frac{1}{2};$ **(2)**

c) $5x - 3\left\{x - \frac{3x-1}{4} - \left[1 - 2x + \frac{2(x+3)}{5}\right]\right\} = 2.$ **(3)**

Soluție

a) Deoarece

$(1) \Leftrightarrow \frac{8(x-1) + 18x - 4(x-2) + 3x - 2(5x+3)}{24} = 1 \Leftrightarrow 8x - 8 + 18x - 4x + 8 + 3x - 10x - 6 = 24 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 15x - 6 = 24 \Leftrightarrow 15x = 30$, iar 2 este soluția ultimei ecuații, rezultă că 2 este și soluția ecuației (1).

b) Remarcând faptul că $(2) \Leftrightarrow \frac{12(11x-5) - 21x + 16(x+10)}{30} = \frac{49}{2} \Leftrightarrow 132x - 60 - 21x + 16x + 160 = = 735 \Leftrightarrow 127x + 100 = 735 \Leftrightarrow 127x = 635$, iar 5 este soluția ultimei ecuații, deducem că 5 este și soluția ecuației (2).

c) Întrucât

$(3) \Leftrightarrow 5x - 3\left(x - \frac{3x-1}{4} - \frac{5 - 10x + 2x + 6}{5}\right) = 2 \Leftrightarrow 5x - 3\left(x - \frac{3x-1}{4} - \frac{11 - 8x}{5}\right) = 2 \Leftrightarrow 5x - 3x + + \frac{3(3x-1)}{4} + \frac{3(11-8x)}{5} = 2 \Leftrightarrow 2x + \frac{3(3x-1)}{4} + \frac{3(11-8x)}{5} = 2 \Leftrightarrow 40x + 15(3x-1) + 12(11-8x) = = 40 \Leftrightarrow 40x + 45x - 15 + 132 - 96x = 40 \Leftrightarrow -11x + 107 = 40 \Leftrightarrow 11x = 77$, iar 7 este soluția ultimei ecuații, rezultă că 7 este și soluția ecuației (3).

5. Rezolvați ecuațiile:

a) $x - \frac{\frac{x}{2} - \frac{x-5}{4}}{2} = 2 - \frac{\left(1 - \frac{6-x}{3}\right) \cdot \frac{1}{2}}{2};$ **(1)**

b) $x + \frac{2x - \frac{4-3x}{5}}{15} = \frac{7x - \frac{x-3}{2}}{5} - 2.$ **(2)**

Soluție

a) Întrucât

$$(1) \Leftrightarrow x - \frac{\frac{x+5}{4}}{2} = 2 - \frac{\frac{x-3}{3} \cdot \frac{1}{2}}{2} \Leftrightarrow x - \frac{x+5}{8} = 2 - \frac{\frac{x-3}{6}}{2} \Leftrightarrow x - \frac{x+5}{8} = 2 - \frac{x-3}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24x - 3(x+5) = 48 - 2(x-3) \Leftrightarrow 21x - 15 = 54 - 2x \Leftrightarrow 23x = 69 \Leftrightarrow x = 3,$$

rezultă că 3 este soluția ecuației (1).

b) Remarcând faptul că $(2) \Leftrightarrow x + \frac{\frac{13x-4}{5}}{15} = \frac{\frac{13x+3}{2}}{5} - 2 \Leftrightarrow x + \frac{13x-4}{75} = \frac{13x+3}{10} - 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 150x + 2(13x-4) = 15(13x+3) - 300 \Leftrightarrow 176x - 8 = 195x - 255 \Leftrightarrow 19x = 247 \Leftrightarrow x = 13$, deducem

Scanned with OKEN Scanner

că 13 este soluția ecuației (2).

6. Fie m un parametru real. Rezolvați ecuația: $m^2(x-1)-2x=2(x-m)$.

Soluție

Remarcând faptul că $m^2(x-1)-2x=2(x-m)\Leftrightarrow m^2x-m^2-2x=2x-2m\Leftrightarrow(m^2-4)x=$ $=m^2-2m\Leftrightarrow(m-2)(m+2)x=m(m-2)$, deducem următoarele:

1) dacă $m\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$, atunci ecuația inițială are soluție unică, iar aceasta este $\frac{m}{m+2}$;

2) dacă $m=2$, atunci orice $x\in\mathbb{R}$ este soluție a ecuației inițiale;

3) dacă $m=-2$, atunci ecuația inițială nu are nici o soluție (căci, în cazul considerat, $(m-2)(m+2)=0$, iar $m(m-2)=8\neq 0$).

7. Fie m un parametru real. Rezolvați ecuația: $m(m+3)x+1=m^2-2x$.

Soluție

Remarcând faptul că $m(m+3)x+1=m^2-2x\Leftrightarrow m^2x+3mx+1=m^2-2x\Leftrightarrow(m^2+3m+2)x=$ $=m^2-1\Leftrightarrow(m+1)(m+2)x=(m+1)(m-1)$, deducem următoarele:

1) dacă $m\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}$, atunci ecuația inițială are soluție unică, iar aceasta este $\frac{m-1}{m+2}$;

2) dacă $m=-1$, atunci orice $x\in\mathbb{R}$ este soluție a ecuației inițiale;

3) dacă $m=-2$, atunci ecuația considerată nu are nici o soluție (căci, în acest caz, $(m+1)(m+2)=0$, iar $(m-1)(m+1)=3\neq 0$).

8. Determinați valorile parametrului real m pentru care ecuațiile $4x-3+3(1-x)=2$ și $2m(x-3)=2x-3$ sunt echivalente.

Soluție

Rezolvând prima dintre ecuațiile din enunț, deducem că 2 este soluția acestei ecuații. Rezultă că cele două ecuații sunt echivalente dacă și numai dacă cea de a doua dintre ecuațiile considerate are soluție unică, iar aceasta este 2.

Evident, $2m(x-3)=2x-3\Leftrightarrow 2mx-6m=2x-3\Leftrightarrow 2(m-1)x=6m-3$. Rezultă că, dacă $m\neq 1$, atunci această ecuație are soluție unică, iar soluția ei este $\frac{6m-3}{2(m-1)}$. Din cele stabilite anterior deducem că cele două ecuații sunt echivalente dacă și numai dacă $m\neq 1$ și $\frac{6m-3}{2(m-1)}=2$, ceea ce conduce la $m=-\frac{1}{2}$.

9. Determinați valorile parametrului real m pentru care ecuațiile $m(mx+1)=x+m^2$ și $m^2(x-1)-2m=(3m-2)x-3$ sunt echivalente.

Soluție

Întrucât $m(mx+1)=x+m^2\Leftrightarrow(m-1)(m+1)x=m(m-1)$, rezultă că:

1) dacă $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, atunci ecuația are soluție unică, și anume, $\frac{m}{m+1}$;

2) dacă $m=1$, atunci orice $x\in\mathbb{R}$ este soluție a ecuației;

3) dacă $m=-1$, atunci ecuația nu are nici o soluție.

Remarcând faptul că $m^2(x-1)-2m=(3m-2)x-3\Leftrightarrow(m^2-3m+2)x=m^2+2m-3\Leftrightarrow(m-1)(m-2)x=$ $=(m-1)(m+3)$, deducem că:

1) dacă $m\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$, atunci ecuația are soluție unică, iar aceasta este $\frac{m+3}{m-2}$;

2) dacă $m=1$, atunci orice $x\in\mathbb{R}$ este soluție a ecuației;

3) dacă $m=2$, atunci ecuația nu are nici o soluție.

Ca urmare a celor stabilite anterior, conchidem că:

Scanned with OKEN Scanner

a) dacă $m=1$, atunci ecuațiile considerate sunt echivalente;
b) dacă $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1, 1, 2\}$, cele două ecuații sunt echivalente atunci și numai atunci când $\frac{m}{m+1}=\frac{m+3}{m-2}$, ceea ce conduce la $m=-\frac{1}{2}$.

10. Fie m un parametru real. Rezolvați ecuația $\frac{mx-2}{x-2}=4$.

Soluție

Este necesar ca $x\neq 2$. În acest caz,
$\frac{mx-2}{x-2}=4\Leftrightarrow mx-2=4x-8\Leftrightarrow mx-4x=-6\Leftrightarrow (m-4)x=-6$.
Dacă $m=4$, atunci ultima ecuație nu are nici o soluție. Deci, în cazul considerat, nici ecuație inițială nu are nici o soluție.
Fie $m\neq 4$. Atunci, ecuația $(m-4)x=-6$ are soluție unică, iar aceasta este $-\frac{6}{m-4}$. Pentru ca $-\frac{6}{m-4}$ să fie și soluție a ecuației inițiale, este necesar ca $-\frac{6}{m-4}\neq 2$, ceea ce conduce la $m-4\neq -3$, de unde $m\neq 1$.
Ca urmare a celor stabilite anterior, conchidem că :
1) dacă $m\in\{1, 4\}$, ecuația inițială nu are nici o soluție;
2) dacă $m\in\mathbb{R}\setminus\{1, 4\}$, ecuația inițială are soluție unică, iar aceasta este $-\frac{6}{m-4}$.

11. Fie m un parametru real. Rezolvați ecuația :

$$\frac{2m+1}{x+3}=\frac{m-2}{x-1} \qquad (1)$$

Soluție

Evident, este necesar ca $x\neq -3$ și $x\neq 1$. Atunci,
$(1)\Leftrightarrow (2m+1)(x-1)=(m-2)(x+3)\Leftrightarrow 2mx+x-2m-1=mx-2x+3m-6\Leftrightarrow (m+3)x=$
$=5m-5$.
Dacă $m=-3$, atunci ultima ecuație nu are nici o soluție, deci nici ecuația (1) nu are nici o soluție.
Dacă $m\neq -3$, atunci ecuația $(m+3)x=5m-5$ are soluție unică, și anume, $\frac{5m-5}{m+3}$. Pentru ca aceasta să fie și soluție a ecuației (1), este necesar ca $\frac{5m-5}{m+3}\neq -3$ și $\frac{5m-5}{m+3}\neq 1$. Remarcăm faptul că $\frac{5m-5}{m+3}\neq -3$ conduce la $5m-5\neq -3m-9$, de unde $m\neq -\frac{1}{2}$. Totodată, $\frac{5m-5}{m+3}\neq 1$ impune $m\neq 2$.
Ca urmare a celor stabilite anterior, conchidem că :
1) dacă $m\in\left\{-3, -\frac{1}{2}, 2\right\}$, ecuația (1) nu are nici o soluție;
2) dacă $m\in\mathbb{R}\setminus\left\{-3, -\frac{1}{2}, 2\right\}$, ecuația (1) are o soluție unică, iar aceasta este $\frac{5m-5}{m+3}$.

12. Fie $m\in\mathbb{Z}$ un parametru și ecuația $(3m-1)x-1=m(x+4)$.
a) Rezolvați ecuația.
b) Determinați valorile lui m pentru care soluția ecuației este număr întreg.

Soluție

a) Evident, $(3m-1)x-1=m(x+4)\Leftrightarrow 3mx-x-1=mx+4m\Leftrightarrow (2m-1)x=4m+1$.
Deoarece $2m-1\neq 0$ (oricare ar fi $m\in\mathbb{Z}$), rezultă că ultima ecuație are soluție unică (oricare ar fi $m\in\mathbb{Z}$), iar aceasta este $\frac{4m+1}{2m-1}$. Prin urmare, ecuația

Scanned with OKEN Scanner

inițială are soluție unică, iar soluția ecuației este $\frac{4m+1}{2m-1}$ (oricare ar fi $m \in \mathbb{Z}$).

b) Întrucât $\frac{4m+1}{2m-1} = \frac{2(2m-1)+3}{2m-1} = 2 + \frac{3}{2m-1}$, rezultă că soluția ecuației considerate este număr întreg dacă și numai dacă $\frac{3}{2m-1} \in \mathbb{Z}$, ceea ce are loc pentru $2m-1 \in \{-3, -1, 1, 3\}$. Deducem imediat că $m \in \{-1, 0, 1, 2\}$.

13. Fie $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ un parametru și ecuația $\frac{x}{a-1} - \frac{x}{a} = \frac{1}{a+1}$.

1) Rezolvați ecuația.
2) Este posibil ca $a-2$ să fie soluție a ecuației?
3) Determinați valorile lui $a \in \mathbb{Z}$ pentru care soluția ecuației este număr întreg.

Soluție

1) Deoarece $\frac{x}{a-1} - \frac{x}{a} = \frac{1}{a+1} \Leftrightarrow \frac{ax - ax + x}{a(a-1)} = \frac{1}{a+1} \Leftrightarrow \frac{x}{a(a-1)} = \frac{1}{a+1} \Leftrightarrow x = \frac{a^2-a}{a+1}$, soluția ecuației considerate este $\frac{a^2-a}{a+1}$.

2) Dacă $a-2$ este soluție a ecuației considerate, atunci $\frac{a^2-a}{a+1} = a-2$, ceea ce conduce la $a^2 - a = (a+1)(a-2)$, de unde $a^2 - a = a^2 - a - 2$. Cum ultima egalitate nu este posibilă, rezultă că $a-2$ nu poate fi soluție a ecuației din enunț.

3) Remarcând faptul că $\frac{a^2-a}{a+1} = \frac{a^2-a-2+2}{a+1} = \frac{(a+1)(a-2)+2}{a+1} = a-2+\frac{2}{a+1}$, iar $a-2 \in \mathbb{Z}$ (căci $a \in \mathbb{Z}$), deducem că soluția ecuației este număr întreg dacă și numai dacă $\frac{2}{a+1} \in \mathbb{Z}$, ceea ce are loc pentru $a+1 \in \{-2, -1, 1, 2\}$. Drept urmare, $a \in \{-3, -2, 0, 1\}$. Cum $a \neq 0$ și $a \neq 1$, convin numai valorile -3 și -2.

14. Rezolvați ecuația $||2x-3|-2| = 1$.

Soluție

Egalitatea $||2x-3|-2| = 1$ are loc dacă și numai dacă $|2x-3|-2 = -1$ sau $|2x-3|-2 = 1$.
Dacă $|2x-3|-2 = -1$, atunci $|2x-3| = 1$, ceea ce conduce la $2x-3 = -1$ sau $2x-3 = 1$, de unde $x = 1$ sau $x = 2$.
Dacă $|2x-3|-2 = 1$, atunci $|2x-3| = 3$, ceea ce conduce la $2x-3 = -3$ sau $2x-3 = 3$, de unde $x = 0$ sau $x = 3$.
Ca urmare a celor stabilite anterior, soluțiile ecuației considerate sunt: 0, 1, 2 și 3.

15. Rezolvați ecuațiile:
a) $||x-1|-2| = 3$;
b) $\sqrt{(2x-1)(2x-3)+1} = 4$.

Soluție

a) Egalitatea reprezentată de ecuația din enunț are loc dacă și numai dacă $|x-1|-2 = -3$ sau $|x-1|-2 = 3$, ceea ce conduce la $|x-1| = -1$ sau $|x-1| = 5$. Cum $|x-1| \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, egalitatea $|x-1| = -1$ nu este posibilă. Remarcând faptul că soluțiile ecuației $|x-1| = 5$ sunt -4 și 6, deducem că -4 și 6 sunt soluțiile ecuației inițiale.
b) Deoarece $(2x-1)(2x-3)+1 = 4x^2 - 8x + 4 = 4(x-1)^2$, ecuația considerată este echivalentă cu $2|x-1| = 4$, ceea ce conduce la $|x-1| = 2$. Rezultă că $x-1 = -2$ sau $x-1 = 2$, deci -1 și 3 sunt soluțiile ecuației considerate.

Scanned with OKEN Scanner

16. Rezolvați ecuațiile:

a) $|3x-5-|x-1||=0$;

b) $|2x+3-|x-2||=0$.

Soluție

a) Evident, egalitatea reprezentată de ecuația din enunț are loc dacă și numai dacă $3x-5-|x-1|=0$, ceea ce conduce la $3x-5=|x-1|$. Întrucât $|x-1|\geq 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$, este necesar ca $3x-5\geq 0$, de unde $x\geq\frac{5}{3}$. Atunci, $|x-1|=x-1$, iar ultima ecuație devine $3x-5=x-1$, ceea ce conduce la $x=2$. Remarcând și faptul că $2>\frac{5}{3}$, deducem că 2 este soluția ecuației din enunț.

b) Evident, ecuația considerată este echivalentă cu:

$$2x+3=|x-2|. \qquad (1)$$

Pentru ca egalitatea (1) să aibă loc, este necesar ca $2x+3\geq 0$, ceea ce conduce la $x\geq-\frac{3}{2}$.

Dacă $-\frac{3}{2}\leq x<2$, atunci ecuația (1) conduce la $2x+3=2-x$, de unde $x=-\frac{1}{3}$.

Cum $-\frac{3}{2}<-\frac{1}{3}<2$, rezultă că $-\frac{1}{3}$ este soluție a ecuației.

Dacă $x\geq 2$, atunci ecuația (1) devine $2x+3=x-2$, de unde $x=-5$. Remarcând faptul că $-5<2$, deducem că, în cazul considerat, ecuația nu are nici o soluție.

Drept urmare, $-\frac{1}{3}$ este singura soluție a ecuației din enunț.

17. Fie $(a,\ b)$ o soluție a ecuației $2x-3y-7=0$. Determinați a și b, știind că $3a+2b=4$.

Soluție

Deoarece perechea $(a,\ b)$ este o soluție a ecuației $2x-3y-7=0$, rezultă că $2a-3b=7$. Ținând seama și de faptul că $3a+2b=4$, deducem că numerele a și b se obțin rezolvând sistemul $\begin{cases}2a-3b=7\\3a+2b=4\end{cases}$. Cum perechea $(2,\ -1)$ este soluția acestui sistem, conchidem că $a=2$ și $b=-1$.

18. Fie $a,\ b$ doi parametri reali și sistemul:

$$\begin{cases}ax+by=7\\bx+ay=3.\end{cases}$$

Determinați a și b astfel încât perechea $(-1,\ 3)$ să fie soluție a sistemului considerat.

Soluție

Întrucât perechea $(-1,\ 3)$ este soluție a sistemului considerat, rezultă că $-a+3b=7$ și $-b+3a=3$. Rezolvând sistemul $\begin{cases}-a+3b=7\\3a-b=3\end{cases}$, obținem $a=2$ și $b=3$.

19. Rezolvați sistemul:

$$\begin{cases}3(y+2)-2(x-3)=16\\(2x-3)(3y-4)=(3x+1)(2y-5).\end{cases} \qquad (1)$$

Soluție

Remarcăm, mai întâi, faptul că $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}3y+6-2x+6=16\\6xy-9y-8x+12=6xy+2y-15x-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+3y=4\\7x-11y=-17.\end{cases}$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvând ultimul sistem, obținem $x=7$ și $y=6$. Prin urmare, perechea $(7, 6)$ este soluția sistemului (1).

20. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ și mulțimile $A=\{5x-2y-3,\ 2x+y-5\}$, $B=\{4x+y-10,\ 3x-y-1\}$. Determinați x și y astfel încât $A=B$.

Soluție

Evident, $A=B$ dacă și numai dacă $5x-2y-3=4x+y-10$ și $2x+y-5=3x-y-1$, sau $5x-2y-3=3x-y-1$ și $2x+y-5=4x+y-10$. Rezolvând sistemul format din primele două ecuații, obținem $x=2$ și $y=3$. Rezolvând sistemul format din ultimele două ecuații, deducem că $x=\frac{5}{2}$ și $y=3$. Drept urmare, $A=B$ atunci și numai atunci când $x=2$ și $y=3$, sau $x=\frac{5}{2}$ și $y=3$.

21. Rezolvați sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{2x-3y}{3}-y=\dfrac{7x-1}{4}-\dfrac{4x+7y}{5} \\ x+\dfrac{x+3y}{4}-\dfrac{x-2y}{5}=\dfrac{3x-7y}{8}. \end{cases} \quad (1)$$

Soluție

Deoarece $(1)\Leftrightarrow \begin{cases} 20(2x-3y)-60y=15(7x-1)-12(4x+7y) \\ 40x+10(x+3y)-8(x-2y)=5(3x-7y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40x-120y=57x-84y-15 \\ 42x+46y=15x-35y \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 17x+36y=15 \\ 27x=-81y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17x+36y=15 \\ x=-3y \end{cases}$, iar soluția ultimului sistem este perechea $(3, -1)$, rezultă că această pereche este și soluția sistemului (1).

22. Rezolvați sistemul:

$$\begin{cases} (x-2)^2-(y+1)^2=(x+3)^2-y^2-72 \\ \dfrac{x-3}{y}=\dfrac{x-1}{y-1}. \end{cases} \quad (1)$$

Soluție

Este necesar ca $y\neq 0$ și $y\neq 1$. Atunci,

$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+4-y^2-2y-1=x^2+6x+9-y^2-72 \\ (x-3)(y-1)=(x-1)y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x+2y=66 \\ xy-3y-x+3=xy-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x+2y=66 \\ x+2y=3. \end{cases}$

Rezolvând ultimul sistem, obținem $x=7$ și $y=-2$. Prin urmare, perechea $(7, -2)$ este soluția sistemului (1).

23. Fie m un parametru real. Rezolvați sistemul:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ mx-2y=1. \end{cases} \quad (1)$$

Soluție

Evident, $(1)\Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ mx-2(3-x)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x \\ (m+2)x=7. \end{cases}$

Dacă $m\neq -2$, atunci ecuația $(m+2)x=7$ are soluție unică, iar aceasta este $x=\frac{7}{m+2}$. Cum $y=3-x$, rezultă că $y=3-\frac{7}{m+2}=\frac{3m-1}{m+2}$. Prin urmare, în

Scanned with OKEN Scanner

cazul considerat, soluția sistemului (1) este perechea $\left(\frac{7}{m+2}, \frac{3m-1}{m+2}\right)$.

Dacă $m=-2$, atunci ecuația $(m+2)x=7$ nu are nici o soluție, deci nici sistemul (1) nu are nici o soluție.

24. Fie m un parametru real. Rezolvați sistemul:

$$\begin{cases} mx+y=2 \\ 4x+my=4. \end{cases} \quad (1)$$

Soluție

Evident, $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-mx \\ 4x+m(2-mx)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-mx \\ 4x+2m-m^2x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-mx \\ (m^2-4)x=2(m-2). \end{cases}$

Dacă $m \neq -2$ și $m \neq 2$, atunci ecuația $(m^2-4)x=2(m-2)$ are soluție unică, iar aceasta este $x=\frac{2}{m+2}$. Cum $y=2-mx$, rezultă că $y=2-\frac{2m}{m+2}=\frac{4}{m+2}$. Deci, în cazul considerat, sistemul (1) are soluție unică, iar aceasta este perechea $\left(\frac{2}{m+2}, \frac{4}{m+2}\right)$.

Dacă $m=-2$, atunci ecuația $(m^2-4)x=2(m-2)$ nu are nici o soluție. Drept urmare, în acest caz, nici sistemul (1) nu are nici o soluție.

Dacă $m=2$, atunci orice $x \in \mathbb{R}$ este soluție a ecuației $(m^2-4)x=2(m-2)$. Rezultă că orice pereche $(a, 2-2a)$, cu $a \in \mathbb{R}$, este soluție a sistemului (1).

25. Determinați valoarea parametrului real nenul m pentru care elementele perechii care reprezintă soluția sistemului

$$\begin{cases} 2mx-(m-1)y=3-3m \\ 4mx-(2m-3)y=9-4m \end{cases} \quad (1)$$

sunt direct proporționale cu 2 și 5.

Soluție

Deoarece

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2mx-(m-1)y=3-3m \\ 4mx-(2m-3)y-2[2mx-(m-1)y]=9-4m-2(3-3m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2mx-(m-1)y=3-3m \\ y=2m+3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2mx-(m-1)(2m+3)=3-3m \\ y=2m+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx=m(m-1) \\ y=2m+3 \end{cases},$$ rezultă că sistemul (1) are soluție unică (căci $m \neq 0$), iar aceasta este perechea $(m-1, 2m+3)$. Ținând seama de condiția impusă în enunț cu privire la soluția sistemului, deducem că $\frac{m-1}{2}=\frac{2m+3}{5}$, de unde $m=11$.

26. Determinați valorile parametrului $a \in \mathbb{N}^*$ pentru care elementele perechii ce reprezintă soluția sistemului

$$\begin{cases} ax+(a+1)y=3a^2+3a-3 \\ 2ax-3(a+1)y=6a^2-9a-1 \end{cases} \quad (1)$$

sunt numere naturale.

Soluție

Evident,

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} ax+(a+1)y=3a^2+3a-3 \\ 2[ax+(a+1)y]-[2ax-3(a+1)y]=2(3a^2+3a-3)-(6a^2-9a-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+(a+1)y=3a^2+3a-3 \\ 5(a+1)y=15a-5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Scanned with OKEN Scanner

$\Leftrightarrow \begin{cases} ax+(a+1)y=3a^2+3a-3 \\ y=\dfrac{3a-1}{a+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3a^2-2}{a} \\ y=\dfrac{3a-1}{a+1} \end{cases}$, deci perechea $\left(\dfrac{3a^2-2}{a}, \dfrac{3a-1}{a+1}\right)$ este soluția sistemului (1). Deoarece $\dfrac{3a^2-2}{a}=3a-\dfrac{2}{a}$, rezultă că $\dfrac{3a^2-2}{a}\in\mathbf{N}$ dacă și numai dacă $a\in\{1,2\}$. Remarcând faptul că, pentru $a=1$, $\dfrac{3a-1}{a+1}=1\in\mathbf{N}$, iar, pentru $a=2$, $\dfrac{3a-1}{a+1}=\dfrac{5}{3}\notin\mathbf{N}$, conchidem că elementele perechii ce reprezintă soluția sistemului (1) sunt numere naturale atunci și numai atunci când $a=1$.

27. Determinați valorile parametrilor reali a și b pentru care sistemul:

$$\begin{cases} 3x-2y=8 \\ 2x+3y=1 \\ ax+by=-1 \\ 3ax-2by=12 \end{cases} \quad (1)$$

este compatibil.

Soluție

Rezolvând sistemul format din primele două ecuații ale sistemului (1), obținem $x=2$ și $y=-1$. Remarcând faptul că sistemul (1) este compatibil dacă și numai dacă perechea $(2,-1)$ este și soluție a fiecăreia dintre ultimele două ecuații ale sistemului (1), deducem că $2a-b=-1$ și $6a+2b=12$, de unde $a=1$ și $b=3$.

28. Rezolvați sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{18}{3x-2y}+\dfrac{11}{2x-3y}=13 \\ \dfrac{27}{3x-2y}-\dfrac{2}{2x-3y}=1. \end{cases}$$

Soluție

Este necesar ca $3x-2y\neq 0$ și $2x-3y\neq 0$.

Notând $\dfrac{1}{3x-2y}=z$ și $\dfrac{1}{2x-3y}=t$, sistemul considerat devine $\begin{cases} 18z+11t=13 \\ 27z-2t=1 \end{cases}$.

Rezolvând acest sistem, obținem $z=\dfrac{1}{9}$ și $t=1$. Prin urmare, $3x-2y=9$ și $2x-3y=1$, ceea ce conduce la $x=5$ și $y=3$. Rezultă că perechea $(5,3)$ este soluția sistemului inițial.

29. Rezolvați sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{3x-y+1}{3x-y}+\dfrac{10}{x+2y}=4 \\ \dfrac{2}{3x-y}+\dfrac{3x+6y-15}{x+2y}=2. \end{cases} \quad (1)$$

Soluție

Este necesar ca $3x-y\neq 0$ și $x+2y\neq 0$. Atunci,

$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} 1+\dfrac{1}{3x-y}+\dfrac{10}{x+2y}=4 \\ \dfrac{2}{3x-y}+\dfrac{3(x+2y)-15}{x+2y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3x-y}+\dfrac{10}{x+2y}=3 \\ \dfrac{2}{3x-y}-\dfrac{15}{x+2y}=-1. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Notând $\frac{1}{3x-y}=z$ și $\frac{1}{x+2y}=t$, ultimul sistem devine $\begin{cases} z+10t=3 \\ 2z-15t=-1. \end{cases}$ Rezolvând acest sistem, obținem $z=1$ și $t=\frac{1}{5}$. Drept urmare, $3x-y=1$ și $x+2y=5$, de unde $x=1$ și $y=2$, ceea ce arată că perechea $(1, 2)$ este soluția sistemului inițial.

30. Rezolvați sistemul:

$$\begin{cases} 2x-\frac{4}{3x-2y}=y+2 \\ 6x+\frac{8}{3x-2y}=3y+11. \end{cases}$$

Soluție

Este necesar ca $3x-2y\neq 0$.

Evident, sistemul considerat este echivalent cu $\begin{cases} 2x-y-\frac{4}{3x-2y}=2 \\ 3(2x-y)+\frac{8}{3x-2y}=11. \end{cases}$

Notând $2x-y=z$ și $\frac{1}{3x-2y}=t$, ultimul sistem devine $\begin{cases} z-4t=2 \\ 3z+8t=11. \end{cases}$ Rezolvând acest sistem, obținem $z=3$ și $t=\frac{1}{4}$. În consecință, $2x-y=3$ și $3x-2y=4$, ceea ce conduce la $x=2$ și $y=1$. Rezultă că perechea $(2, 1)$ este soluția sistemului inițial.

31. Rezolvați sistemul:

$$\begin{cases} \frac{(x+3y-1)(2x-y+2)}{3x+2y+1}=\frac{3}{2} \\ \frac{3}{x+3y-1}+\frac{2}{2x-y+2}=\frac{3}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

Soluție

Evident, este necesar ca $x+3y-1\neq 0$, $2x-y+2\neq 0$ și $3x+2y+1\neq 0$. Atunci,

$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+3y-1)+(2x-y+2)}{(x+3y-1)(2x-y+2)}=\frac{2}{3} \\ \frac{3}{x+3y-1}+\frac{2}{2x-y+2}=\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2x-y+2}+\frac{1}{x+3y-1}=\frac{2}{3} \\ \frac{3}{x+3y-1}+\frac{2}{2x-y+2}=\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Notând $\frac{1}{x+3y-1}=z$ și $\frac{1}{2x-y+2}=t$, sistemul anterior devine $\begin{cases} z+t=\frac{2}{3} \\ 3z+2t=\frac{3}{2} \end{cases}$.

Rezolvând acest sistem, obținem $z=\frac{1}{6}$ și $t=\frac{1}{2}$. Prin urmare, $x+3y-1=6$ și $2x-y+2=2$, de unde $x=1$ și $y=2$. Rezultă că perechea $(1, 2)$ este soluția sistemului (1).

32. Rezolvați sistemul:

$$\begin{cases} 16x+6y-5xy=18 \\ 5x+3y-xy=9. \end{cases} \quad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Soluție

Evident, $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 16x+6y-5xy-2(5x+3y-xy)=0 \\ 5x+3y-xy=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(y-2)=0 \\ 5x+3y-xy=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 5x+3y-xy=9 \end{cases}$

sau $\begin{cases} y-2=0 \\ 5x+3y-xy=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$. În consecință, perechile $(0, 3)$ și $(1, 2)$ sunt soluțiile sistemului (1).

33. Determinați numerele reale x și y cu proprietatea că $|2x-3y|+|3x-y-7|=0$.

Soluție

Deoarece $|a| \geq 0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, egalitatea din enunț are loc dacă și numai dacă $|2x-3y|=0$ și $|3x-y-7|=0$, ceea ce conduce la $2x-3y=0$ și $3x-y-7=0$ (căci $|a|=0$ atunci și numai atunci când $a=0$). Rezolvând sistemul format din aceste două ecuații, obținem $x=3$ și $y=2$.

34. Rezolvați sistemul:

$$\begin{cases} x+3y=12 \\ |x-1|=|y-1|. \end{cases} \quad (1)$$

Soluție

Evident, egalitatea $|x-1|=|y-1|$ are loc dacă și numai dacă $x-1=y-1$ sau $x-1=1-y$, ceea ce conduce la $x=y$ sau $x=2-y$. Drept urmare, $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=12 \\ x=y \end{cases}$ sau $\begin{cases} x+3y=12 \\ x=2-y. \end{cases}$ Rezolvând aceste sisteme, deducem că soluțiile sistemului (1) sunt perechile $(3, 3)$ și $(-3, 5)$.

35. Rezolvați sistemul:

$$\begin{cases} 4|x-1|-3|y+1|=6 \\ 5|x-1|-4|y+1|=7. \end{cases} \quad (1)$$

Soluție

Notând $|x-1|=z$ și $|y+1|=t$ ($z \geq 0$ și $t \geq 0$), sistemul (1) devine $\begin{cases} 4z-3t=6 \\ 5z-4t=7 \end{cases}$.

Rezolvând acest sistem, obținem $z=3$ și $t=2$. Atunci, $|x-1|=3$, iar $|y+1|=2$. Evident, $|x-1|=3$ are loc dacă și numai dacă $x=-2$ sau $x=4$, iar $|y+1|=2$ are loc atunci și numai atunci când $y=-3$ sau $y=1$. În consecință, soluțiile sistemului (1) sunt perechile: $(-2, -3)$, $(-2, 1)$, $(4, -3)$ și $(4, 1)$.

36. Determinați perechile (x, y) de numere întregi cu proprietatea că $|x^2+x|+|2y-x|=3$.

Soluție

Deoarece $x^2+x=x(x+1)$, rezultă că $x^2+x \geq 0$ (oricare ar fi $x \in \mathbb{Z}$), deci $|x^2+x|=x^2+x=x(x+1)$. Astfel egalitatea din enunț devine

$$x(x+1)+|2y-x|=3. \quad (1)$$

Remarcând faptul că $x(x+1) \in \mathbb{N}$, $|2y-x| \in \mathbb{N}$ și $x(x+1)$ este număr par, deducem că egalitatea (1) poate avea loc doar dacă $x(x+1)=0$ și $|2y-x|=3$, sau $x(x+1)=2$ și $|2y-x|=1$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $x(x+1)=0$, atunci $x=-1$ sau $x=0$. Pentru $x=-1$, egalitatea $|2y-x|=3$ conduce la $|2y+1|=3$, de unde $y=-2$ sau $y=1$. Pentru $x=0$, egalitatea $|2y-x|=3$ devine $|2y|=3$, ceea ce nu poate avea loc (căci $y\in\mathbb{Z}$).
Dacă $x(x+1)=2$, atunci $x=-2$ sau $x=1$. Pentru $x=-2$, egalitatea $|2y-x|=1$ conduce la $|2y+2|=1$, ceea ce nu poate avea loc. Pentru $x=1$, egalitatea $|2y-x|=1$ devine $|2y-1|=1$, de unde $y=0$ sau $y=1$.
Ca urmare a celor stabilite anterior, soluțiile problemei sunt perechile : $(-1,\ -2)$, $(-1,\ 1)$, $(1,\ 0)$ și $(1,\ 1)$.

37. Determinați perechile $(x,\ y)$ de numere întregi cu proprietatea că $x^2+y^2=4-2|xy|$.

Soluție

Întrucât $a^2=|a|^2$ (oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$), egalitatea din enunț este echivalentă cu $|x|^2+|y|^2+2|x||y|=4$, ceea ce conduce la $(|x|+|y|)^2=4$, de unde $|x|+|y|=2$. Remarcând faptul că $|x|,\ |y|\in\mathbb{N}$ (căci $x,\ y\in\mathbb{Z}$), ultima egalitate are loc dacă și numai dacă $|x|=0$ și $|y|=2$, sau $|x|=|y|=1$, sau $|x|=2$ și $|y|=0$.
Dacă $|x|=0$ și $|y|=2$, atunci $x=0$ și $y=-2$, sau $x=0$ și $y=2$.
Dacă $|x|=|y|=1$, atunci $x=-1$ și $y=-1$, sau $x=-1$ și $y=1$, sau $x=1$ și $y=-1$, sau $x=1$ și $y=1$.
Dacă $|x|=2$ și $|y|=0$, atunci $x=-2$ și $y=0$, sau $x=2$ și $y=0$.
Drept urmare, perechile căutate sunt :

$$(-2,\ 0),\ (-1,\ -1),\ (-1,\ 1),\ (0,\ -2),\ (0,\ 2),\ (1,\ -1),\ (1,\ 1)\ \text{și}\ (2,\ 0).$$

38. Determinați perechile $(a,\ b)$ de numere întregi cu proprietatea că $\sqrt{|2a-1|+3}=6b-b^2-7$.

Soluție

Deoarece $2a-1$ este număr întreg impar, rezultă că $|2a-1|\geq 1$, de unde $|2a-1|+3\geq 4$, ceea ce implică $\sqrt{|2a-1|+3}\geq 2$. Prin urmare, egalitatea din enunț poate avea loc numai dacă $6b-b^2-7\geq 2$, ceea ce conduce la $(b-3)^2\leq 0$. Cum $(b-3)^2\geq 0$ (oricare ar fi $b\in\mathbb{Z}$), rezultă că $(b-3)^2=0$, de unde $b=3$. Atunci, egalitatea considerată devine $\sqrt{|2a-1|+3}=2$. Evident, ultima egalitate conduce la $|2a-1|+3=4$, de unde $|2a-1|=1$, ceea ce are loc dacă $a=0$ sau $a=1$. În consecință, perechile căutate sunt : $(0,\ 3)$ și $(1,\ 3)$.

39. Fie $x,\ y\in\mathbb{R}$, $a,\ b\in\mathbb{N}$ și $A=4x^2+y^2+4x-6y+3a+2b$. Determinați perechile $(a,\ b)$ pentru care cea mai mică valoare posibilă a lui A este 5.

Soluție

Întrucât $A=4x^2+4x+1+y^2-6y+9-10+3a+2b=(2x+1)^2+(y-3)^2+3a+2b-10$, iar $(2x+1)^2\geq 0$ și $(y-3)^2\geq 0$ (oricare ar fi $x,\ y\in\mathbb{R}$), rezultă că $A\geq 3a+2b-10$, oricare ar fi $x,\ y\in\mathbb{R}$. Drept urmare, cea mai mică valoare posibilă a lui A este $3a+2b-10$. Având în vedere că această valoare este 5, deducem că $3a+2b=15$. Deoarece $3|3a$ și $3|15$, rezultă că $3|2b$, de unde $3|b$ (căci $(3,\ 2)=1$). Ținând seama și de faptul că $b\leq 7$ (fiindcă $2b\leq 15$), iar $b\in\mathbb{N}$, rezultă că $b\in\{0,\ 3,\ 6\}$.
Dacă $b=0$, atunci ultima egalitate devine $3a=15$, de unde $a=5$.
Dacă $b=3$, atunci $a=3$, iar dacă $b=6$, atunci $a=1$.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, perechile căutate sunt : $(1, 6)$, $(3, 3)$ și $(5, 0)$.

40. Fie $a \in \mathbb{Q}$ și $b \in \mathbb{Z}^*$. Arătați că, dacă $a^2 - 4b^2 = 9$, atunci $|b| = 2$.

Soluție

Întrucât $a^2 = 9 + 4b^2$, iar $b \in \mathbb{Z}$, rezultă că $a^2 \in \mathbb{N}$, ceea ce, împreună cu $a \in \mathbb{Q}$, arată că $a \in \mathbb{Z}$.

Remarcând faptul că egalitatea din enunț poate fi scrisă sub forma $(a - 2b)(a + 2b) = 9$, iar $a - 2b \in \mathbb{Z}$ și $a + 2b \in \mathbb{Z}$, deducem că $a - 2b = -9$ și $a + 2b = -1$, sau $a - 2b = a + 2b = -3$, sau $a - 2b = -1$ și $a + 2b = -9$, sau $a - 2b = 1$ și $a + 2b = 9$, sau $a - 2b = a + 2b = 3$, sau $a - 2b = 9$ și $a + 2b = 1$. Rezolvând aceste sisteme (în necunoscutele a și b), deducem că $b = -2$, sau $b = 2$ (căci $b \in \mathbb{Z}^*$). Drept urmare, $|b| = 2$.

41. Determinați perechile (x, y) de numere naturale, știind că $x^2 - 8y = 25$ și că y este număr prim diferit de 2.

Soluție

Evident, egalitatea din enunț poate fi scrisă sub forma $(x - 5)(x + 5) = 8y$. Deoarece $x - 5$ și $x + 5$ sunt numere naturale de aceeași paritate (evident, $x - 5 > 0$), iar $8y$ este număr par, rezultă că $x - 5$ și $x + 5$ trebuie să fie numere pare. Remarcăm și faptul că $x + 5 \geq 6$. Atunci, egalitatea anterioară poate avea loc doar dacă $x - 5 = 2$ și $x + 5 = 4y$, sau $x - 5 = 4$ și $x + 5 = 2y$. Deducem că $x = 7$ și $y = 3$, sau $x = 9$ și $y = 7$, deci perechile căutate sunt : $(7, 3)$ și $(9, 7)$.

42. Determinați valorile lui $n \in \mathbb{Z}$ pentru care numărul $n^2 - 7n + 6$ este pătrat perfect.

Soluție

Numărul considerat eate pătrat perfect dacă și numai dacă există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $n^2 - 7n + 6 = k^2$, ceea ce conduce la $4n^2 - 28n + 24 = 4k^2$. Rezultă că $4n^2 - 28n + 49 = 4k^2 + 25$, de unde $(2n - 7)^2 - 4k^2 = 25$, ceea ce implică $(2n - 2k - 7)(2n + 2k - 7) = 25$. Având în vedere că $2n - 2k - 7 \in \mathbb{Z}$ și $2n + 2k - 7 \in \mathbb{Z}$, ultima egalitate are loc dacă și numai dacă $2n - 2k - 7 = -25$ și $2n + 2k - 7 = -1$, sau $2n - 2k - 7 = -5$ și $2n + 2k - 7 = -5$, sau $2n - 2k - 7 = -1$ și $2n + 2k - 7 = -25$, sau $2n - 2k - 7 = 1$ și $2n + 2k - 7 = 25$, sau $2n - 2k - 7 = 5$ și $2n + 2k - 7 = 5$, sau $2n - 2k - 7 = 25$ și $2n + 2k - 7 = 1$. Rezolvând fiecare din aceste sisteme, deducem că $n \in \{-3, 1, 6, 10\}$.

43. Fie $n \in \mathbb{N}$. Arătați că, dacă $4n + 1$ și $9n + 7$ sunt simultan pătrate perfecte, atunci fiecare dintre numerele : $2n + 1$, $3n + 5$, $4n + 9$, $5n + 13$ și $6n + 17$ este prim.

Soluție

Numerele $4n + 1$ și $9n + 7$ sunt simultan pătrate perfecte dacă și numai dacă există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $4n + 1 = h^2$ și $9n + 7 = k^2$, iar $h, k \in \mathbb{N}$. Atunci, $4k^2 - 9h^2 = 19$, ceea ce conduce la $(2k - 3h)(2k + 3h) = 19$. Ținând seama și de faptul că $h, k \in \mathbb{N}$, ultima egalitate are loc dacă și numai dacă $2k - 3h = 1$ și $2k + 3h = 19$ (căci $2k - 3h < 2k + 3h$). Rezolvând acest sistem, obținem $k = 5$, ceea ce implică $n = 2$. Atunci, $2n + 1 = 5$, $3n + 5 = 11$, $4n + 9 = 17$, $5n + 13 = 23$ și $6n + 17 = 29$. Remarcând și faptul că 2, 5, 11, 17, 23 și 29 sunt numere prime, rezolvarea problemei este încheiată.

44. Determinați $x, y \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\sqrt{9x + 7} + \sqrt{x + 8} = y$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție

Deoarece $9x+7\in\mathbb{N}$, $x+8\in\mathbb{N}$ (căci $x\in\mathbb{N}$) și $\sqrt{9x+7}+\sqrt{x+8}\in\mathbb{N}$ (fiindcă $y\in\mathbb{N}$), rezultă că $\sqrt{9x+7}\in\mathbb{N}$ și $\sqrt{x+8}\in\mathbb{N}$. Atunci, există $k, m\in\mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{9x+7}=k$ și $\sqrt{x+8}=m$. Drept urmare, $9x+7=k^2$ și $x+8=m^2$, egalități ce implică $9m^2-k^2=65$, de unde $(3m-k)(3m+k)=65$. Având în vedere că $3m-k\in\mathbb{N}$, $3m+k\in\mathbb{N}$ și $3m-k<3m+k$, ultima egalitatea are loc dacă și numai dacă $3m-k=1$ și $3m+k=65$, sau $3m-k=5$ și $3m+k=13$. Rezolvând fiecare din aceste sisteme, deducem că $m=11$ sau $m=3$. Dacă $m=11$, atunci $x=113$ și $y=43$, iar dacă $m=3$, atunci $x=1$ și $y=7$.

45. Determinați perechile $(x;y)$ de numere naturale cu proprietatea că

$$\left|(2x+y-10)^2+3x-2y+4\right|-3x+2y=4.$$

Soluție

Remarcăm, mai întâi, că egalitatea din enunț este echivalentă cu $\left|(2x+y-10)^2+3x-2y+4\right|=3x-2y+4$. Cum $|a|\geq 0$ (oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$), egalitatea anterioară este posibilă dacă și numai dacă $3x-2y+4\geq 0$. Dacă această condiție este îndeplinită, atunci $(2x+y-10)^2+3x-2y+4\geq 0$, iar egalitatea din enunț devine $(2x+y-10)^2+3x-2y+4=3x-2y+4$, de unde $(2x+y-10)^2=0$, ceea ce conduce la $2x+y-10=0$. Întrucât $x, y\in\mathbb{N}$, ultima egalitate are loc dacă și numai dacă $x=0$ și $y=10$, sau $x=1$, $y=8$, sau $x=2$, $y=6$, sau $x=3$, $y=4$, sau $x=4$ și $y=2$, sau $x=5$ și $y=0$. Remarcând faptul că perechile $(0, 10)$, $(1, 8)$ și $(2, 6)$ nu îndeplinesc condiția $3x-2y+4\geq 0$, soluțiile problemei sunt doar perechile : $(3, 4)$, $(4, 2)$ și $(5, 0)$.

46. Determinați perechile $(x;y)$ de numere naturale nenule cu proprietatea că $(x+y)(xy+2)=6xy$.

Soluție

Evident, $(x+y)(xy+2)=6xy\Leftrightarrow(x+y)xy+2(x+y)=6xy\Leftrightarrow 2(x+y)=xy[6-(x+y)]$. Deoarece $x+y>0$ și $xy>0$ (căci $x, y\in\mathbb{N}^*$), ultima egalitate poate avea loc numai dacă $6-(x+y)>0$, de unde $x+y<6$. Ținând seama și de faptul că $x+y\geq 2$, iar $x+y\in\mathbb{N}$, deducem că $x+y=2$, sau $x+y=3$, sau $x+y=4$, sau $x+y=5$.
Dacă $x+y=2$, atunci $xy=1$ (din egalitatea din enunț). Evident, aceste egalități au loc simultan dacă și numai dacă $x=y=1$.
Dacă $x+y=3$, atunci $xy=2$. Deci, $x=1$, $y=2$, sau $x=2$, $y=1$.
Dacă $x+y=4$, atunci $xy=4$. Rezultă că $x=y=2$.
Dacă $x+y=5$, atunci $xy=10$. Se arată cu ușurință că nu există nici o pereche (x, y) de numere naturale care să verifice simultan aceste egalități.
Ca urmare a celor stabilite anterior, perechile : $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ și $(2, 2)$ sunt soluțiile problemei.

47. Determinați tripletele (x, y, z) de numere naturale cu proprietatea că

$$x(y+z+4)+yz=12. \qquad (1)$$

Soluție

Deoarece $(1)\Leftrightarrow xy+yz+zx+4x=12$, iar $xy+yz+zx\geq 0$ (căci $x, y, z\in\mathbb{N}$), rezultă că $4x\leq 12$, de unde $x\leq 3$ ceea ce are loc dacă și numai dacă $x\in\{0, 1, 2, 3\}$.
Dacă $x=0$, atunci (1) conduce la $yz=12$, egalitate îndeplinită atunci și

Scanned with OKEN Scanner

numai atunci când $y=1$ și $z=12$, sau $y=2$ și $z=6$, sau $y=3$ și $z=4$, sau $y=4$ și $z=3$, sau $y=6$ și $z=2$, sau $y=12$ și $z=1$.

Dacă $x=1$, atunci (1) devine $yz+y+z=9$, de unde $(y+1)(z+1)=10$ (căci $yz+y+z+1=y(z+1)+(z+1)=(y+1)(z+1)$). Evident, egalitatea $(y+1)(z+1)=10$, are loc dacă și numai dacă $y+1=1$ și $z+1=10$, sau $y+1=2$ și $z+1=5$, sau $y+1=5$ și $z+1=2$, sau $y+1=10$ și $z+1=1$. Rezultă că $y=0$ și $z=9$, sau $y=1$ și $z=4$, sau $y=4$ și $z=1$, sau $y=9$ și $z=0$.

Dacă $x=2$, atunci (1) conduce la $yz+2y+2z+4=8$, de unde $(y+2)(z+2)=8$. Se arată cu ușurință că ultima egalitate are loc atunci și numai atunci când $y=0$ și $z=2$, sau $y=2$ și $z=0$.

Dacă $x=3$, atunci (1) devine $yz+3y+3z+9=15$, ceea ce conduce la $(y+3)(z+3)=15$. Rezultă că $y=0$ și $z=2$, sau $y=2$ și $z=0$.

Ca urmare a celor stabilite anterior, soluțiile problemei sunt tripletele : $(0, 1, 12)$, $(0, 2, 6)$, $(0, 3, 4)$, $(0, 4, 3)$, $(0, 6, 2)$, $(0, 12, 1)$, $(1, 0, 9)$, $(1, 1, 4)$, $(1, 4, 1)$, $(1, 9, 0)$, $(2, 0, 2)$, $(2, 2, 0)$, $(3, 0, 2)$ și $(3, 2, 0)$.

48. Suma unor numere naturale consecutive este 45. Aflați numerele.

Soluție

Fie n ($n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$) numărul termenilor sumei și $k+1$ ($k\in\mathbb{N}$) primul termen al sumei. Atunci, termenii sumei sunt : $k+1, k+2, \ldots, k+n$, iar suma lor este

$$(k+1)+(k+2)+\ldots+(k+n)=nk+(1+2+\ldots+n)=nk+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(2k+n+1)}{2}.$$

Drept urmare, $\frac{n(2k+n+1)}{2}=45$, de unde $n(2k+n+1)=2\cdot 3^2\cdot 5$.

Deoarece $n, 2k+n+1\in\mathbb{N}$ și $2k+n+1>n\geq 2$, ultima egalitate poate avea loc doar în următoarele situații :

1) $n=2$ și $2k+n+1=45$. Atunci, $k=21$, iar numerele căutate sunt : 22 și 23.

2) $n=3$ și $2k+n+1=30$. În acest caz, $k=13$, iar termenii sumei sunt : 14, 15 și 16.

3) $n=5$ și $2k+n+1=18$. Atunci, $k=6$, iar numerele căutate sunt : 7, 8, 9, 10 și 11.

4) $n=6$ și $2k+n+1=15$. În acest caz, $k=4$. Rezultă că termenii sumei sunt : 5, 6, 7, 8, 9 și 10.

5) $n=9$ și $2k+n+1=10$. Atunci, $k=0$, iar numerele căutate sunt : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 și 9.

49. Suma a trei numere naturale este 502. Aflați cele trei numere, știind că al doilea este triplul primului și că, împărțind pe al treilea la al doilea, se obține câtul 7 și restul 2.

Soluție

Fie x primul număr. Atunci, al doilea este $3x$. Deoarece, împărțind al treilea număr la al doilea, obținem câtul 7 și restul 2, rezultă că al treilea număr este $7\cdot 3x+2=21x+2$. Remarcând și faptul că suma celor trei numere este 502, deducem că $x+3x+21x+2=502$. Rezolvând această ecuație, obținem $x=20$. Prin urmare, numerele căutate sunt : 20, $3\cdot 20=60$ și $21\cdot 20+2=422$.

50. Pentru pregătirea unui examen, un elev și-a propus să rezolve un anumit număr de probleme. Dacă ar rezolva câte 10 probleme pe zi, elevul le-ar termina cu 4 zile mai devreme decât dacă ar rezolva câte 8 probleme pe zi. Aflați numărul de probleme pe care elevul și-a propus să le rezolve.

Soluție

Fie x numărul de zile necesar pentru rezolvarea problemelor în cazul în care elevul ar rezolva câte 10 probleme pe zi; rezultă că numărul total al problemelor este $10x$. Dacă elevul ar rezolva câte 8 probleme pe zi, numărul de zile necesar

Scanned with OKEN Scanner

pentru rezolvarea lor ar fi $x+4$, deci numărul total de probleme este $8(x+4)$. Deducem că $10x=8(x+4)$. Rezolvând această ecuaţie, obţinem $x=16$. Drept urmare, elevul şi-a propus să rezolve $10\cdot 16=160$ de probleme.

51. Aflaţi atât vârsta unui copil, cât şi vârsta mamei sale, ştiind că în urmă cu 3 ani vârsta copilului era de 5 ori mai mică decât vârsta mamei sale, iar peste 2 ani vârsta mamei sale va fi triplul vârstei copilului ei.

Soluţie

Fie x (ani) vârsta copilului în urmă cu 3 ani (faţă de prezent); rezultă că în acelaşi moment vârsta mamei sale era $5x$ (ani). După 2 ani (faţă de prezent) cele două vârste devin $x+5$ (ani), respectiv $5x+5$ (ani). Cum, în acest moment, vârsta mamei este triplul vârstei copilului ei, rezultă că $5x+5=3(x+5)$. Rezolvând această ecuaţie, obţinem $x=5$. Prin urmare, în prezent, cele două vârste sunt de $5+3=8$ ani, respectiv $5\cdot 5+3=28$ de ani.

52. Suma numerelor reprezentând vârstele (în ani) a trei fraţi şi a tatălui lor este 54. Aflaţi vârstele copiilor, ştiind că acestea sunt reprezentate de trei numere impare consecutive şi că, la naşterea mezinului, tatăl lor avea de 7 ori vârsta celui mai mare dintre fraţi.

Soluţie

Fie x (ani) vârsta mezinului. Atunci, vârsta celui mijlociu este $x+2$ (ani), iar vârsta celui mare este $x+4$ (ani). La naşterea mezinului, cel mai mare dintre copii avea 4 ani, deci, în acel moment, tatăl lor avea $7\cdot 4=28$ de ani. Prin urmare, în prezent, vârsta tatălui este $x+28$ (ani). Deducem că, în prezent, suma vârstelor celor patru persoane este $x+(x+2)+(x+4)+(x+28)=4x+34$. Cum această sumă este 54, rezultă că $4x+34=54$. Rezolvând această ecuaţie, obţinem $x=5$. În consecinţă, cei trei fraţi au, respectiv, vârstele : 5 ani, 7 ani şi 9 ani.

53. Suma a trei numere naturale este 105. Aflaţi numerele, ştiind că dublul primului este egal cu suma celorlalte două şi că diferenţa dintre al treilea şi al doilea este egală cu dublul celui de al doilea mărit cu 6.

Soluţie

Deoarece diferenţa dintre al treilea şi al doilea număr este egală cu dublul celui de al doilea mărit cu 6, rezultă că al treilea număr este egal cu triplul celui de al doilea mărit cu 6. Fie x al doilea număr; rezultă că al treilea număr este $3x+6$. Prin urmare, suma acestor două numere este $x+3x+6=2(2x+3)$. Cum dublul primului număr este egal cu suma celorlalte două, deducem că primul număr este $2x+3$.

Ţinând seama atât de cele stabilite anterior, cât şi de faptul că suma celor trei numere este 105, conchidem că $(2x+3)+x+(3x+6)=105$. Rezolvând această ecuaţie, obţinem $x=16$. Drept urmare, cele trei numere sunt : $2\cdot 16+3=35$, 16 şi $3\cdot 16+6=54$.

54. Trei copii, A, B şi C, au nişte nuci. Se ştie că B are cu două nuci mai mult decât A, iar C are cu două nuci mai mult decât B. Fiecare dintre ei oferă unui prieten comun D o parte din nucile pe care le are, după cum urmează : A oferă $\frac{1}{4}$ din nucile sale, B, $\frac{1}{2}$ din nucile sale, iar C, 4 nuci. După aceasta, celor trei copii le mai rămân 46 de nuci. Aflaţi câte nuci a primit D de la prietenii săi.

Soluţie

Întrucât A a oferit $\frac{1}{4}$ din nucile pe care le are, putem considera că numărul nucilor sale este $4x$ (căci numărul nucilor lui A trebuie să se împartă exact la 4). Rezultă că B are $4x+2$ nuci, iar C, $4x+4$ nuci. Deducem că A oferă lui D x nuci, iar B oferă lui D $2x+1$ nuci. Prin

Scanned with OKEN Scanner

urmare, după ce A, B şi C au oferit nuci lui D, acestora le rămân următoarele numere de nuci : $3x$ lui A, $2x+1$ lui B şi $4x$ lui C. Cum celor trei le rămân 46 de nuci, rezultă că $3x+(2x+1)+4x=46$. Rezolvând această ecuaţie, obţinem $x=5$. În consecinţă, D a primit de la cei trei prieteni ai săi $5+2\cdot5+1+4=20$ de nuci.

55. Pentru obţinerea unui bilet de călătorie cu un autobuz, o persoană oferă o bacnotă de 50000 lei. Odată cu biletul, persoana primeşte şi rest, care reprezintă $\frac{1}{4}$ din costul biletului şi încă 5000 lei. Ştiind că restul îl primeşte în monede de 500 lei şi 1000 lei, iar numărul monedelor de 1000 lei este de trei ori mai mare decât al celor de 500 lei, aflaţi numărul monedelor care constituie restul.

Soluţie

Fie x (lei) costul biletului de călătorie; rezultă că restul este $\frac{x}{4}+5000$ (lei). Deducem că $x+\frac{x}{4}+5000=50000$. Rezolvând această ecuaţie, obţinem $x=36000$ lei. Deci, restul primit de călător este de $50000-36000=14000$ lei. O grupă formată dintr-o monedă de 500 lei şi trei monede de 1000 lei reprezintă 3500 lei. Pentru 14000 lei sunt necesare $14000:3500=4$ astfel de grupe, ceea ce arată că restul este constituit din 4 monede de 500 lei şi $4\cdot3=12$ monede de 1000 lei.

56. O persoană cheltuieşte într-un magazin $\frac{1}{3}$ din suma pe care o avea şi încă 40000 lei. În alt magazin cheltuieşte $\frac{1}{2}$ din rest şi încă 34000 lei. Din banii rămaşi mai cumpără un pix şi o carte. Ştiind că pixul a costat cu 30000 lei mai puţin decât cartea, iar cartea este de trei ori mai scumpă decât pixul, aflaţi suma iniţială a persoanei.

Soluţie

Fie x (lei) preţul pixului. Atunci, preţul cărţii este $3x$ (lei). Deducem că $3x-x=30000$, de unde $x=15000$. Deci, preţul pixului este de 15000 lei, iar preţul cărţii, $3\cdot15000=45000$ lei.

Fie y (lei) suma iniţială a persoanei. Atunci, suma cheltuită în primul magazin este $\frac{y}{3}+40000$ (lei), iar în cel de al doilea,

$$\frac{1}{2}\left[y-\left(\frac{y}{3}+40000\right)\right]+34000=\frac{1}{2}\left(\frac{2y}{3}-40000\right)+34000=\frac{y}{3}+14000 \text{ (lei)}.$$

Ţinând seama de cele stabilite anterior, deducem că $\frac{y}{3}+40000+\frac{y}{3}+14000+60000=y$. Rezolvând această ecuaţie, obţinem $y=342000$. Deci, suma iniţială a persoanei este 342000 lei.

57. Într-un camion s-au încărcat 5400 kg de cereale. Erau 20 de saci cu grâu a 70 kg sacul, 24 saci cu orz având fiecare dintre ei aceeaşi greutate şi 32 de saci cu porumb având fiecare dintre ei aceeaşi greutate. Se mai ştie că 3 saci cu orz cântăresc cu 20 kg mai mult decât 2 saci cu porumb. Aflaţi cât cântăreşte fiecare sac cu orz şi fiecare sac cu porumb.

Soluţie

Sacii cu orz şi cei cu porumb cântăresc împreună $5400-70\cdot20=4000$ kg. Fie x (kg) masa unui sac cu porumb şi y (kg) masa unui sac cu orz. Rezultă că $32x+24y=4000$, ceea ce conduce la $4x+3y=500$. Pe de altă parte, $3y=2x+20$ (căci 3 saci cu orz cântăresc cu 20 kg mai mult decât 2 saci cu porumb). Rezolvând sistemul $\begin{cases}4x+3y=500\\3y=2x+20\end{cases}$, obţinem $x=80$ şi $y=60$. Drept urmare, un sac cu porumb cântăreşte 80 de kg, iar un sac cu orz, 60 de kg.

Scanned with OKEN Scanner

58. **În vederea premierii unor elevi dintr-o clasă a VII – a, s-au cumpărat 15 cărți, pentru care s-a plătit suma de 800000 lei. Se mai știe că s-au cumpărat trei feluri de cărți, și anume : unele a 50000 lei exemplarul, altele a 60000 lei exemplarul și restul a 80000 lei exemplarul. Aflați câte cărți de fiecare fel s-au cumpărat.**

Soluție

Fie x numărul cărților a 60000 lei exemplarul și y numărul cărților a 80000 lei exemplarul. Rezultă că s-au cumpărat $15-(x+y)$ cărți a 50000 lei exemplarul. Deducem că $50000[15-(x+y)]+60000x+80000y=800000$, de unde $5[15-(x+y)]+6x+8y=80$. Se arată cu ușurință că ultima ecuație este echivalentă cu $x+3y=5$. Cum $x, y\in\mathbf{N}^*$, această egalitate este îndeplinită dacă și numai dacă $x=2$ și $y=1$. Prin urmare, s-au cumpărat $15-(2+1)=12$ cărți a 50000 lei exemplarul, 2 cărți a 60000 lei exemplarul și o singură carte de 80000 lei.

59. **Pentru a împodobi un brad de Crăciun, o persoană cumpără trei feluri de globulețe : unele de 1200 lei bucata, altele de 1500 lei bucata și altele de 2500 lei bucata. Aflați câte globulețe de fiecare fel a cumpărat respectiva persoană, știind că numărul globulețelor de 2500 lei bucata este egal cu numărul globulețelor de 1200 lei bucata și că toate globulețele au costat 48300 lei.**

Soluție

Fie x numărul globulețelor de 1200 lei bucata și y numărul globulețelor de 1500 lei bucata ($x, y\in\mathbf{N}^*$). Atunci, costul globulețelor este $1200x+1500y+2500x=$ $=100(37x+15y)$ lei. Rezultă că $100(37x+15y)=48300$, ceea ce conduce la

$$37x+15y=483. \qquad (1)$$

Evident, $u(15y)\in\{0, 5\}$. Dacă $u(15y)=0$, atunci $u(37x)=3$, iar dacă $u(15y)=5$, atunci $u(37x)=8$ (din egalitatea (1)). Remarcând faptul că $37x<483$, deducem că $x\leq 13$ (căci $x\in\mathbf{N}$).

1) Dacă $u(37x)=3$, atunci $u(x)=9$, ceea ce împreună cu $x\leq 13$, arată că $x=9$. Atunci, egalitatea (1) devine $333+15y=483$, de unde $y=10$.

2) Dacă $u(37x)=8$, atunci $u(x)=4$, deci $x=4$. În acest caz, egalitatea (1) conduce la $15y=335$. Cum $15\nmid 335$, ultima egalitate nu poate avea loc, iar situația considerată nu convine.

Ca urmare a celor stabilite anterior, respectiva persoană a cumpărat 9 globulețe a 1200 lei bucata, 10 globulețe a 1500 lei bucata și 9 globulețe a 2500 lei bucata.

60. **Se consideră triunghiul ABC în care $AB=1$ cm și $m(\hat{B})=60°$. Fie $BC=a$ și $CA=b$. Aflați P_{ABC}, știind că $a, b\in\mathbf{N}$.**

O.M., etapa locală, Iași, 2000

Soluție

Fie $AD\perp BC$ ($D\in BC$). Pentru rezolvarea problemei, trebuie să analizăm următoarele situații :

1) $m(\hat{C})=90°$. Atunci, $m(\hat{A})=30°$, de unde $BC=\frac{1}{2}$ cm. Cum $\frac{1}{2}\notin\mathbf{N}$, situația considerată nu convine.

2) $m(\hat{C})<90°$. În acest caz, $D\in(BC)$. Întrucât $m(\widehat{BAD})=30°$, rezultă că $BD=\frac{1}{2}$ cm, deci $CD=a-\frac{1}{2}$ (cm). Remarcăm și faptul că $AD=\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm (căci $AD^2=AB^2-BD^2$). Având în vedere că $AC^2-CD^2=AD^2$, deducem că $b^2-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$, ceea ce conduce la $(2b-2a+1)(2b+2a-1)=3$. Ținând seama de faptul că $2b-2a+1\in\mathbf{N}$, $2b+2a-1\in\mathbf{N}$ și $2b-2a+1<2b+2a-1$, ultima

Scanned with OKEN Scanner

egalitate are loc dacă și numai dacă $2b-2a+1=1$ și $2b+2a-1=3$. Rezolvând acest sistem, obținem $a=b=1$. Drept urmare, în cazul considerat, $P_{ABC}=3$ cm.

3) $m(\hat{C})>90°$. Atunci, $C\in(BD)$, ceea ce implică $BD>BC$. Cum $BD=\frac{1}{2}$ cm (din triunghiul ABD) și $BC=a\geq 1$ (fiindcă $a\in\mathbb{N}^*$), inegalitatea $BD>BC$ nu este posibilă. Deci, nici această situație nu convine.
Ca urmare a celor stabilite anterior, $P_{ABC}=3$ cm, iar aceasta are loc doar dacă $m(\hat{C})<90°$.

PROBLEME PROPUSE

1. Rezolvați ecuația $x-3x+5x-7x+9x-11x+13x-15x+17x-19x+21x=22$.

2. Rezolvați ecuațiile:
   a) $3[2x-5(x-10)]+5[x-2(x-3)-5(2-2x)]=22$;
   b) $3(2x-5)-\{6x-(9x+8)-2[3x-4(1-x)]\}=54$.

3. Rezolvați ecuațiile:
   a) $12x^2-5x+(1-3x)(1+3x)-3(x-2)(x+3)=27$;
   b) $5(x-1)^2-2(x+3)^2=3(x+2)^2-7(6x-1)$;
   c) $(2x-1)^2+(x+2)^2+(x-3)^2+3(x+1)^2=(3x-2)^2+1$;
   d) $(x\sqrt{3}-1)^2+(x\sqrt{2}+1)^2-x(5x+2)=2(\sqrt{2}-\sqrt{3})x+5$.

4. Rezolvați ecuațiile:
   a) $\frac{3x-1}{5}+\frac{5x+1}{6}=\frac{x-1}{3}+\frac{9x+1}{8}$;
   b) $\frac{2x+1}{3}-\frac{x+2}{4}+\frac{3x+2}{8}-\frac{8x-3}{12}=1\frac{7}{12}$;
   c) $\frac{2(x-4)}{3}+\frac{3x+13}{8}=\frac{3(2x-3)}{5}-7$;
   d) $\frac{x}{2}-\frac{2(x-1)}{3}-\frac{3(x-2)}{4}-\frac{5(x+3)}{6}=\frac{6(x-1)+11}{12}$.

5. Rezolvați ecuațiile:
   a) $x-\frac{1-\frac{3x}{2}}{4}+\frac{\frac{x}{4}-2}{3}=2$;
   b) $\frac{3(4x-5)}{10}-\frac{5(x+3)}{18}=\frac{4\left(x-\frac{3x-1}{6}\right)}{3}$;
   c) $2x-\frac{x+\frac{2x-3}{2}}{3}+\frac{1-\frac{2x-4}{3}}{4}=\frac{4x+5}{4}$.

6. Determinați valoarea parametrului real m pentru care $x=1$ este soluția ecuației $\frac{2x-m}{2}+\frac{2m+3x}{3}-\frac{3x+2m}{4}=1$.

7. Fie m un parametru real. Rezolvați ecuația $m(x-m)=3(x-3)$.

8. Fie m un parametru real. Rezolvați ecuația $(mx-1)^2+2(m-2)x=m^2(x^2-x+1)-3(m-1)$.

9. Determinați valoarea parametrului real m pentru care ecuațiile $3x(x-2)+x^2-2=4(x^2-x)-10$ și $mx-m^2=x-4$ sunt echivalente.

Scanned with OKEN Scanner

10. Determinați valorile parametrului real m pentru care ecuațiile $m(mx+2)=4x+m^2$ și $m^2x+4=m(2x+m)$ sunt echivalente.

11. Fie m un parametru real. Rezolvați ecuațiile:

a) $\frac{mx-3}{x-3}=2$;

b) $\frac{2x^2-mx+m}{x-3}=2x-4$.

12. Fie a și b doi parametri reali. Rezolvați ecuațiile:

1) $a(ax-1)=b(bx-1)$;

2) $\frac{1}{x}=\frac{b}{a-x}$.

13. Rezolvați ecuațiile:

a) $||3x-2|-1|=4$;

b) $\sqrt{(x-2)(x-4)+1}=2$.

14. Rezolvați ecuațiile:

a) $|2x-5-|x-2||=0$;

b) $|2x+3-|x-1||=0$.

15. Determinați perechile $(x,\ y)$ de numere naturale care sunt soluții ale ecuației $3x+2y-15=0$.

16. Fie $(a,\ b)$ o soluție a ecuației $4x+3y-6=0$. Determinați a și b, știind că $2a+3b=0$.

17. Fie a și b doi parametri reali și sistemul:

$$\begin{cases} ax+by=-3 \\ bx+ay=7. \end{cases}$$

Determinați a și b astfel încât perechea $(-2,\ 3)$ să fie soluție a sistemului.

18. Rezolvați sistemul:

$$\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ x(2y-5)-2y(x+3)-2x=1. \end{cases}$$

19. Rezolvați sistemul:

$$\begin{cases} (x+y)^2-(x+y)(x-y)-2y(x+y)=2(x+y-4) \\ 2(2x-3y)-3(x-y)=5-(x+8y). \end{cases}$$

20. Rezolvați sistemul:

$$\begin{cases} \frac{3x-2y}{5}+\frac{5x-3y}{3}=x+1 \\ \frac{2x-3y}{3}-\frac{3y-4x}{2}=y+1. \end{cases}$$

21. Rezolvați sistemul:

$$\begin{cases} x+2-\frac{5x+3y}{7}=y-\frac{9y+11}{14} \\ y+2-\frac{8y-3x}{7}=x-\frac{2y-5}{5}. \end{cases}$$

22. Fie $x,\ y\in\mathbb{R}$ și mulțimile $A=\{3x+2y,\ 7\}$, $B=\{4,\ 2x-3y\}$. Determinați x și y, știind că $A=B$.

23. Fie m un parametru real. Rezolvați sistemul:

$$\begin{cases} x-y=2 \\ mx-3y=7. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

24. Fie m un parametru real. Rezolvați sistemul :

$$\begin{cases}(m+1)x+y=m\\x+(m+1)y=m+4\end{cases}.$$

25. Fie m un parametru real. Rezolvați sistemul :

$$\begin{cases}mx-y=m^2\\-x+my=m^2-m-1\end{cases}.$$

26. Fie a și b doi parametri reali. Rezolvați sistemul :

$$\begin{cases}x-3y=5\\ax+y=b\end{cases}.$$

27. Fie a și b două numere naturale nenule și distincte. Determinați a și b, astfel încât elementele perechii ce reprezintă soluția sistemului :

$$\begin{cases}ax+by=10\\bx+ay=10\end{cases}$$

să fie numere naturale.

28. Determinați valoarea parametrului real m pentru care sistemul :

$$\begin{cases}3x-2y=7\\4x+y=2\\mx-(3m+1)y=9\end{cases}$$

este compatibil.

29. Determinați valoarile parametrilor reali a și b pentru care sistemul :

$$\begin{cases}4x+3y=5\\2x-y=-5\\2ax+by=-7\\ax-3by=7\end{cases}$$

este compatibil.

30. Rezolvați sistemul :

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x-y+2}+\dfrac{1}{x+y-1}=0,3\\\dfrac{1}{x-y+2}+\dfrac{1}{1-x-y}=0,1\end{cases}.$$

31. Rezolvați sistemul :

$$\begin{cases}\dfrac{2x+5y+3}{2x+5y}-\dfrac{8}{3x-2y}=5\\\dfrac{1}{2x+5y}+\dfrac{9x-6y+16}{3x-2y}=2\end{cases}.$$

32. Rezolvați sistemul :

$$\begin{cases}3x+\dfrac{8}{2x-y}=2y+9\\9x-\dfrac{4}{2x-y}=6y+20\end{cases}.$$

Scanned with OKEN Scanner

33. Determinați numerele reale x și y cu proprietatea că $|2x+3y-3|+|3x-5y-14|=0$.

34. Determinați perechile $(x,\ y)$ de numere reale pentru care are loc egalitatea $\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2y^2-2(y-1)x-3}=\sqrt{2-x}+5$.

35. Rezolvați sistemele:

a) $\begin{cases}3x+y=8\\|x-2|=|y-2|;\end{cases}$ b) $\begin{cases}2|x-1|+y=1\\3|x-1|-4y=7.\end{cases}$

36. Rezolvați sistemul:

$$\begin{cases}|2x-1|+2|y+3|=11\\5|2x-1|-3|y+3|=3.\end{cases}$$

37. Determinați perechile $(x,\ y)$ de numere întregi cu proprietatea că $x^2+4y^2=9-4|xy|$.

38. Determinați perechile $(x,\ y)$ de numere întregi cu proprietatea că $xy-4x-3y+9=0$.

39. Fie $a\in\mathbb{Q}$ și $b\in\mathbb{Z}$. Arătați că, dacă $a^2-b^2=8$, atunci $|a|=3$.

40. Determinați $n\in\mathbb{N}$ pentru care numărul n^2-n+19 este pătrat perfect.

41. Fie $n\in\mathbb{N}$. Arătați că, dacă numerele $6n+3$ și $24n+1$ sunt simultan pătrate perfecte, atunci numerele: $2n+1$, $3n+2$ și $4n+3$ sunt prime.

42. Determinați perechile $(x,\ y)$ de numere naturale cu proprietatea că $\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+3}=y$.

43. Suma a doua numere naturale nenule și diferite este 450. Împărțind numărul mai mare la numărul mai mic, obținem câtul 7 și restul 10. Aflați cele două numere.

44. Suma a trei numere naturale este 694. Aflați cele trei numere, știind că, dacă scădem din fiecare dintre ele același număr natural, obținem, respectiv, 76, 144 și 231.

45. Aflați atât vârsta unui copil, cât și vârsta tatălui său, știind că peste un an vârsta tatălui va fi de 9 ori mai mare decât vârsta copilului, iar peste zece ani vârsta tatălui va fi triplul vârstei copilului.

46. Într-o familie, tatăl, mama, fiica și fiul au împreună 71 de ani. Aflați vârsta fiecăruia dintre ei, știind că tatăl și fiul au împreună de 6 ori vârsta fiicei, că mama și fiica au împreună de 7 ori vârsta fiului și că vârstele fiului și fiicei sunt numere naturale consecutive crescătoare.

47. Diferența a două numere este 5. Mărind descăzutul de 4 ori și scăzătorul de 3 ori, suma rezultatelor obținute este 125. Aflați cele două numere.

48. Raportul a două numere este $\frac{2}{3}$. Micșorând numărul mai mare cu 300 și mărind numărul mic cu 100, obținem două numere al căror raport este $\frac{3}{4}$. Aflați cele două numere.

49. La un concurs de matematică, participanții au primit două probleme: una de algebră și una de geometrie. Problema de algebră a fost rezolvată corect de 40% dintre ei, iar cea de geometrie, de 35% dintre ei. Aflați câți elevi au participat la acest concurs, știind că 8 elevi au rezolvat corect ambele probleme și că 18 elevi nu au rezolvat corect nici una dintre ele.

Scanned with OKEN Scanner

50. Niște elevi dintr-o clasă a VII – a au participat la o lucrare scrisă în vederea selecționării participanților la olimpiada de matematică. O parte dintre ei au primit nota 10, iar ceilalți nota 7. Aflați câți elevi au participat la respectiva lucrare, știind că suma tuturor notelor acordate este 92.

RĂSPUNSURI

1. $x=2$ **2.** a) $x=-3$; b) $x=4$ **3.** a) $x=-1$; b) $x=4$; c) $x=-1$; d) $x=-1{,}5$ **4.** a) $x=7$; b) $x=10$; c) $x=49$; d) $x=-\frac{1}{3}$ **5.** a) $x=2$; b) $x=10$; c) $x=1$ **6.** $m=\frac{3}{4}$ **7.** dacă $m\neq 3$, atunci $x=m+3$, iar dacă $m=3$, atunci $x\in\mathbb{R}$ **8.** dacă $m\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$, atunci $x=\frac{m-1}{m+2}$; dacă $m=2$, atunci $x\in\mathbb{R}$; dacă $m=-2$, atunci $x\in\varnothing$ **9.** $m\in\{0,4\}$ **10.** $m\in\{-1,2\}$ **11.** a) dacă $m\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$, atunci $x=-\frac{3}{m-2}$, iar dacă $m\in\{1,2\}$, atunci $x\in\varnothing$; b) dacă $m\in\mathbb{R}\setminus\{9,10\}$, atunci $x=\frac{m-12}{m-10}$, iar dacă $m\in\{9,10\}$, atunci $x\in\varnothing$ **12.** 1) dacă $a\neq\pm b$, atunci $x=\frac{1}{a+b}$; dacă $a=b$, atunci $x\in\mathbb{R}$; dacă $a=-b$, atunci $x\in\varnothing$; 2) dacă $a\neq 0$, $b\neq 0$ și $b\neq -1$, atunci $x=\frac{a}{b+1}$, iar, în caz contrar, $x\in\varnothing$ **13.** a) $x\in\left\{-1,\frac{7}{3}\right\}$; b) $x\in\{1,5\}$ **14.** a) $x=3$; b) $x=-\frac{2}{3}$ **15.** soluțiile sistemului sunt perechile: $(1,6)$, $(3,3)$ și $(5,0)$ **16.** $a=3$, $b=-2$ **17.** $a=3$, $b=1$ **18.** $x=-1$, $y=1$ **19.** $x=5$, $y=-1$ **20.** $x=3$, $y=2$ **21.** $x=4$, $y=5$ **22.** $x=2$, $y=-1$ **23.** dacă $m\neq 3$, atunci sistemul are soluție unică, și anume, perechea $\left(\frac{1}{m-3},\frac{7-2m}{m-3}\right)$, iar dacă $m=3$, atunci sistemul nu are nici o soluție **24.** dacă $m\in\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}$, atunci sistemul are soluție unică, și anume, perechea $\left(\frac{m-2}{m},\frac{m+2}{m}\right)$, dacă $m=-2$, atunci orice pereche $(a,a-2)$ $(a\in\mathbb{R})$ este soluție a sistemului, dacă $m=0$ nici o soluție **25.** dacă $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, atunci sistemul are soluție unică, și anume, perechea $(m+1,m)$, dacă $m=1$, atunci orice pereche $(a,a-1)$ $(a\in\mathbb{R})$ este soluție a sistemului, dacă $m=-1$ atunci orice pereche $(a,-a-1)$ $(a\in\mathbb{R})$ este soluție a sistemului **26.** dacă $a\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}$, atunci sistemul are soluție unică, și anume, perechea $\left(\frac{3b+5}{3a+1},\frac{b-5a}{3a+1}\right)$, iar dacă $a=-\frac{1}{3}$, atunci sistemul nu are nici o soluție **27.** $a=1$, $b=4$, sau $a=2$, $b=3$, sau $a=3$, $b=2$, sau $a=4$, $b=1$, sau $a=1$, $b=9$, sau $a=2$, $b=8$, sau $a=3$, $b=7$, sau $a=4$, $b=6$, sau $a=6$, $b=4$, sau $a=7$, $b=3$, sau $a=8$, $b=2$, sau $a=9$, $b=1$ **28.** $m=1$ **29.** $a=2$, $b=-1$ **30.** $x=7$, $y=4$ **31.** $x=-2$, $y=1$ **32.** $x=1$, $y=-2$ **33.** $x=3$, $y=-1$ **34.** $(2,-2)$, $(2,3)$ **35.** a) $x=y=2$ **36.** $(-1,-7)$, $(-1,1)$, $(2,-7)$, $(2,1)$ **37.** $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ **38.** $(0,3)$, $(2,1)$, $(4,7)$, $(6,5)$ **40.** $n\in\{3,6,19\}$ **42.** $(6,8)$ **43.** 55 și 395 **44.** 157, 225 și 312 **45.** 2 ani și 26 de ani **46.** 31 de ani, 29 de ani, 6 ani și 5 ani **47.** 20 și 15 **48.** 500 și 750 **49.** 40 **50.** 11.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL V

TRIUNGHIUL

PROBLEME REZOLVATE

1. Se consideră triunghiul ABC în care $m(\widehat{A}) = 2m(\widehat{C})$. Fie D intersecția bisectoarei unghiului BAC cu latura BC și E intersecția paralelei prin D la latura AB cu latura AC. Arătați că, dacă $[EA] \equiv [EC]$, atunci triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.

Soluție

Deoarece $[AD$ este bisectoarea unghiului BAC, rezultă că $m(\widehat{DAC}) = \frac{m(\widehat{BAC})}{2}$. Totodată, $m(\widehat{DCA}) = \frac{m(\widehat{BAC})}{2}$, deci $\widehat{DAC} \equiv \widehat{DCA}$, de unde $[DA] \equiv [DC]$. Remarcând și faptul că $[EA] \equiv [EC]$, deducem că $DE \perp AC$. Întrucât $BA \parallel DE$, rezultă că $BA \perp AC$, de unde $m(\widehat{BAC}) = 90°$. Pe de altă parte, $m(\widehat{C}) = \frac{m(\widehat{BAC})}{2}$, ceea ce conduce la $m(\widehat{C}) = 45°$ și, deci, $m(\widehat{B}) = 45°$. Drept urmare, triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.

2. Fie triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) și $BD \perp AC$ ($D \in AC$). Aflați $m(\widehat{BAC})$, știind că $m(\widehat{ABD}) = 2m(\widehat{CBD})$.

Soluție

Fie $x = m(\widehat{CBD})$. Atunci, $m(\widehat{ABD}) = 2x$, iar $m(\widehat{ABC}) = 3x$. Cum $\widehat{ACB} \equiv \widehat{ABC}$, rezultă că $m(\widehat{ACB}) = 3x$. Remarcând faptul că $BD \perp AC$, deducem că $m(\widehat{CBD}) + m(\widehat{DCB}) = 90°$, de unde $4x = 90°$, ceea ce implică $x = 22°30'$. Totodată, $m(\widehat{BAC}) = 180° - 2m(\widehat{ABC}) = 180° - 6x$, deci $m(\widehat{BAC}) = 45°$.

3. Fie triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), D mijlocul lui $[BC]$ și E un punct situat în interiorul triunghiului. Arătați că, dacă $\widehat{EBA} \equiv \widehat{ECA}$, atunci punctele A, E și D sunt coliniare.

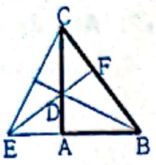
Soluție

Întrucât $m(\widehat{EBC}) = m(\widehat{ABC}) - m(\widehat{EBA})$, $m(\widehat{ECB}) = m(\widehat{ACB}) - m(\widehat{ECA})$, iar $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ACB}$ (căci $[AB] \equiv [AC]$) și $\widehat{EBA} \equiv \widehat{ECA}$, rezultă că $\widehat{EBC} \equiv \widehat{ECB}$, ceea ce implică $[EB] \equiv [EC]$. Ținând seama și de faptul că $[AB] \equiv [AC]$, deducem că $\Delta ABE \equiv \Delta ACE$, de unde $\widehat{BAE} \equiv \widehat{CAE}$. Prin urmare, $[AE$ este bisectoarea unghiului BAC. Cum, într-un triunghi isoscel, bisectoarea unghiului opus bazei triunghiului este și mediana bazei, rezultă că $D \in AE$, deci punctele A, E și D sunt coliniare.

Scanned with OKEN Scanner

4. **Fie triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90°$), D intersecția bisectoarei unghiului ABC cu latura AC și E intersecția perpendicularei din D pe BC cu dreapta AB. Arătați că $[BE] \equiv [BC]$.**

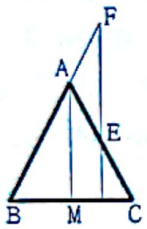
Soluție



Fie $\{F\} = ED \cap BC$.
Deoarece $CA \perp EB$, $EF \perp BC$ și $\{D\} = CA \cap EF$, rezultă că D este ortocentrul triunghiului BCE, ceea ce implică $BD \perp CE$. Remarcând și faptul că $\widehat{CBD} \equiv \widehat{EBD}$, deducem că $[BE] \equiv [BC]$.

5. **Fie triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) și punctele $E \in (AC)$, $F \in (BA$ astfel încât $A \in (BF)$ și $[AF] \equiv [AE]$. Arătați că $EF \perp BC$.**

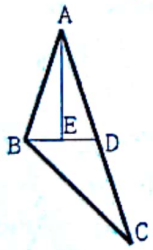
Soluție



Fie $AM \perp BC$ ($M \in BC$). Întrucât $[AB] \equiv [AC]$, rezultă că $m(\widehat{BAM}) = \frac{m(\widehat{BAC})}{2}$. Remarcând că $m(\widehat{AFE}) + m(\widehat{AEF}) = m(\widehat{BAC})$ (căci $\widehat{BAC}$ este unghi exterior al triunghiului AEF) și că $\widehat{AFE} \equiv \widehat{AEF}$ (fiindcă $[AF] \equiv [AE]$), deducem că $m(\widehat{AFE}) = \frac{m(\widehat{BAC})}{2}$.
Prin urmare, $\widehat{BAM} \equiv \widehat{AFE}$, ceea ce implică $AM \parallel EF$. Cum $AM \perp BC$, conchidem că $EF \perp BC$.

6. **Se consideră triunghiul ABC și un punct $D \in (AC)$. Fie E mijlocul lui $[BD]$. Arătați că, dacă bisectoarea unghiului BAC trece prin E, atunci BD nu poate fi nici înălțime și nici bisectoare în triunghiul ABC.**

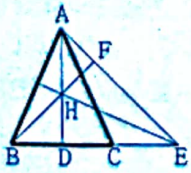
Soluție



Deoarece (în triunghiul ABD) dreapta AE este suport atât pentru bisectoarea cât și pentru mediana ce pornesc din vârful A, rezultă că $[AB] \equiv [AD]$, deci $\widehat{ABD} \equiv \widehat{ADB}$.
1. Dacă BD ar fi înălțime în triunghiul ABC, atunci $m(\widehat{ADB}) = 90°$. Remarcând și faptul că $\widehat{ABD} \equiv \widehat{ADB}$, deducem că triunghiul ABD ar avea două unghiuri drepte, ceea ce nu este posibil. Deci, BD nu poate fi înălțime în triunghiul ABC.
2. Dacă $[BD$ ar fi bisectoare în triunghiul ABC, atunci $\widehat{ABD} \equiv \widehat{CBD}$. Având în vedere că $\widehat{ABD} \equiv \widehat{ADB}$, deducem că $\widehat{ADB} \equiv \widehat{CBD}$, ceea ce contrazice faptul că $m(\widehat{ADB}) > m(\widehat{CBD})$ (căci $\widehat{ADB}$ este unghi exterior al triunghiului BCD), deci $[BD$ nu poate fi bisectoare în triunghiul ABC.

7. **Fie triunghiul isoscel ascuțitunghic ABC ($[AB] \equiv [AC]$), D mijlocul lui $[BC]$, E un punct pe $(DC$, iar H un punct pe $(DA$ astfel încât $[ED] \equiv [DA]$ și $[HD] \equiv [DB]$. Arătați că $EH \perp AB$.**

Soluție



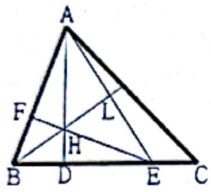
Fie $\{F\} = BH \cap AE$.
Întrucât $[DE] \equiv [DA]$ și $m(\widehat{ADE}) = 90°$, rezultă că $m(\widehat{DEA}) = 45°$, ceea ce este totuna cu $m(\widehat{BEF}) = 45°$. Deoarece $[AB] \equiv [AC]$ și $[DB] \equiv [DC]$, rezultă că $AD \perp BC$, de unde $m(\widehat{HDB}) = 90°$. Remarcând și faptul că $[DH] \equiv [DB]$, deducem că $m(\widehat{DBH}) = 45°$.

Scanned with OKEN Scanner

ceea ce este totuna cu $m(\widehat{EBH}) = 45°$. Drept urmare, $m(\widehat{BFE}) = 90°$, de unde $BF \perp AE$. Totodată, $AD \perp BE$ şi $BF \cap AD = \{H\}$, deci H este ortocentrul triunghiului ABE, ceea ce implică $EH \perp AB$.

8. Fie triunghiul ascuţitunghic ABC, $AD \perp BC$ ($D \in BC$), H intersecţia bisectoarei unghiului ABC cu AD şi E intersecţia perpendicularei din H pe AB cu BC. Arătaţi că $[HE] \equiv [HA]$.

Soluţie



Fie $\{F\} = EH \cap AB$ şi $\{L\} = BH \cap AE$.
Deoarece $AD \perp BE$, $EF \perp AB$ şi $\{H\} = AD \cap EF$, rezultă că H este ortocentrul triunghiului ABE, de unde $BL \perp AE$ (căci $L \in BH$). Remarcând şi faptul că $\widehat{ABL} \equiv \widehat{EBL}$, deducem că $[BA] \equiv [BE]$, ceea ce implică $[EF] \equiv [AD]$ (fiindcă $EF \perp BA$ şi $AD \perp BE$). Întrucât $\Delta BHF \equiv \Delta BHD$ (I.U.), rezultă că $[HF] \equiv [HD]$. Totodată, $HE = EF - HF$ şi $HA = AD - HD$, deci $[HE] \equiv [HA]$.

9. Fie punctele coliniare A, B şi C ($B \in (AC)$) şi punctul $D \notin AB$ astfel încât $[DA] \equiv [DB] \equiv [BC]$. Aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABD, ştiind că triunghiul ACD este isoscel.

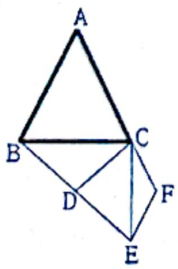
Soluţie

Fie $x = m(\widehat{DAB})$. Atunci, $m(\widehat{DBA}) = x$ şi $m(\widehat{ADB}) = 180° - 2x$. Întrucât $[BC] \equiv [BD]$, rezultă că $\widehat{BCD} \equiv \widehat{BDC}$. Totodată, $m(\widehat{DBA}) = m(\widehat{BCD}) + m(\widehat{BDC})$ (căci $\widehat{DBA}$ este unghi exterior al triunghiului BCD), deci $m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{BDC}) = \frac{x}{2}$. Ţinând seama de faptul că vârful triunghiului isoscel ACD nu este precizat, trebuie să analizăm următoarele situaţii :
1). $[AC] \equiv [AD]$. Atunci, $\widehat{ADC} \equiv \widehat{ACD}$, de unde $180° - 2x + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$, ceea ce conduce la $x = 90°$. Cum aceasta nu este posibil, situaţia considerată nu poate avea loc.
2) $[DA] \equiv [DC]$. În acest caz, $\widehat{DAC} \equiv \widehat{DCA}$, de unde $x = \frac{x}{2}$, ceea ce conduce la $x = 0$. Deoarece aceasta nu este posibil, situaţia considerată nu poate avea loc.
3) $[CA] \equiv [CD]$. Atunci, $\widehat{CAD} \equiv \widehat{CDA}$, de unde $x = 180° - 2x + \frac{x}{2}$, ceea ce conduce la $x = 72°$. Drept urmare, $m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{DBA}) = 72°$ şi $m(\widehat{ADB}) = 36°$.

10. Se consideră triunghiul isoscel ABC de vârf A. Fie D intersecţia perpendicularei în B pe AB cu perpendiculara în C pe AC, E un punct pe $(BD$ astfel încât $D \in (BE)$ şi $[ED] \equiv [DB]$, iar F intersecţia dreptei AC cu perpendiculara în E pe BE. Arătaţi că $[FE] \equiv [FC]$.

G.M. 2/1980

Soluţie



Întrucât $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ACB}$ (căci $[AB] \equiv [AC]$) şi $m(\widehat{DBC}) = 90° - m(\widehat{ABC})$, $m(\widehat{DCB}) = 90° - m(\widehat{ACB})$ (fiindcă $DB \perp BA$ şi $DC \perp CA$), rezultă că $\widehat{DBC} \equiv \widehat{DCB}$. Prin urmare, $[DB] \equiv [DC]$, ceea ce, împreună cu $[DE] \equiv [DB]$, conduce la $[DE] \equiv [DC]$, deci $\widehat{DCE} \equiv \widehat{DEC}$. Având în vedere şi faptul că $m(\widehat{FCE}) = 90° - m(\widehat{DCE})$, $m(\widehat{FEC}) = 90° - m(\widehat{DEC})$ (căci $DC \perp CF$ şi $DE \perp EF$), deducem că $\widehat{FCE} \equiv \widehat{FEC}$, de unde $[FE] \equiv [FC]$.

Scanned with OKEN Scanner

11. **Fie triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) în care $m(\hat{B}) - m(\hat{A}) = 36°$. Bisectoarea unghiului ABC intersectează latura AC în D şi paralela prin A la BC în E. Arătaţi că $AE = BC + CD$.**

Soluţie

Deoarece $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180°$, $\hat{B} \equiv \hat{C}$ (căci $[AB] \equiv [AC]$) şi $m(\hat{B}) = m(\hat{A}) + 36°$, rezultă că $3m(\hat{A}) + 72° = 180°$, de unde $m(\hat{A}) = 36°$. Deci, $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = 72°$ şi $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{CBD}) = 36°$. Remarcând şi faptul că $\widehat{AEB} \equiv \widehat{CBD}$ (fiindcă $AE \parallel BC$), deducem că $m(\widehat{AEB}) = 36°$. Prin urmare, $\widehat{AEB} \equiv \widehat{ABE}$, de unde $[AE] \equiv [AB]$, ceea ce conduce la $AE = AC$. Cum $AC = AD + CD$, rezultă că $AE = AD + CD$. Totodată, $[AD] \equiv [BD]$ (căci $\widehat{DAB} \equiv \widehat{DBA}$) şi $[BD] \equiv [BC]$ (fiindcă $m(\widehat{BCD}) = 72°$ şi $m(\widehat{BDC}) = 72°$ implică $\widehat{BCD} \equiv \widehat{BDC}$), deci $AE = BC + CD$.

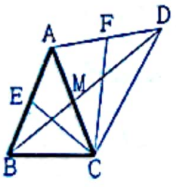
12. **Se consideră triunghiul ABC în care $m(\hat{B}) = 3m(\hat{A})$. Fie D mijlocul lui $[BC]$ şi E intersecţia perpendicularei în D pe BC cu latura AC. Ştiind că $[BE] \equiv [AB]$, aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC.**

Soluţie

Deoarece $[DB] \equiv [DC]$ şi $ED \perp BC$, rezultă că $[EB] \equiv [EC]$, de unde $\widehat{EBC} \equiv \widehat{ECB}$. Remarcând faptul că $m(\widehat{BEA}) = m(\widehat{EBC}) + m(\widehat{ECB})$, deducem că $m(\widehat{BEA}) = 2m(\widehat{ECB})$. Totodată, $\widehat{BAE} \equiv \widehat{BEA}$ (căci $[BE] \equiv [BA]$), deci $m(\widehat{BAE}) = 2m(\widehat{ECB})$, ceea ce este totuna cu $m(\widehat{BAC}) = 2m(\widehat{ACB})$. Cum $m(\widehat{ABC}) = 3m(\widehat{BAC})$, rezultă că $m(\widehat{ABC}) = 6m(\widehat{ACB})$. Ţinând seama atât de cele stabilite anterior, cât şi de faptul că $m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ACB}) = 180°$, deducem că $9m(\widehat{ACB}) = 180°$, de unde $m(\widehat{ACB}) = 20°$. Drept urmare, $m(\widehat{BAC}) = 40°$ şi $m(\widehat{ABC}) = 120°$.

13. **Se consideră triunghiul isoscel ABC de vârf A. Fie M mijlocul lui $[AC]$, D un punct pe $(BM$ astfel încât $[AD] \equiv [AB]$, E mijlocul lui $[AB]$ şi F mijlocul lui $[AD]$. Arătaţi că $CE + CF = BD$.**

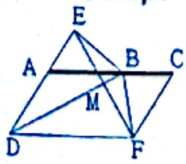
Soluţie



Întrucât $[AB] \equiv [AC]$ şi $[AE] \equiv [EB]$, $[AM] \equiv [MC]$, rezultă că $[CE] \equiv [BM]$ (căci într-un triunghi isoscel medianele corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente). Deoarece $[AC] \equiv [AD]$ (fiindcă $[AC] \equiv [AB]$ şi $[AB] \equiv [AD]$), iar $[AM] \equiv [MC]$ şi $[AF] \equiv [FD]$, rezultă că $[CF] \equiv [DM]$. Ţinând seama atât de cele stabilite anterior, cât şi de faptul că $BD = BM + MD$ (căci $M \in (BD)$), deducem că $BD = CE + CF$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

14. **Se consideră punctele coliniare A, B şi C ($B \in (AC)$ şi $AB \neq BC$). Fie E şi F două puncte situate de o parte şi de alta a dreptei AB astfel încât $EA \parallel FC$, iar D intersecţia perpendicularei din B pe EF cu dreapta AE. Arătaţi că, dacă $[AE] \equiv [CB]$ şi $[CF] \equiv [AB]$, atunci $[DE] \equiv [DF]$.**

Soluţie



Fie $\{M\} = BD \cap EF$.

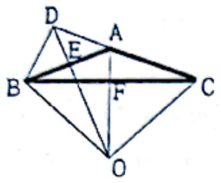
Deoarece $[AB] \equiv [CF]$, $[AE] \equiv [CB]$ şi $\widehat{BAE} \equiv \widehat{FCB}$ (căci $AE \parallel CF$), rezultă că $\triangle ABE \equiv \triangle CFB$, de unde $[BE] \equiv [BF]$. Remarcând şi faptul că $BM \perp EF$, deducem că $[ME] \equiv [MF]$. Prin urmare, BM

Scanned with OKEN Scanner

este mediatoarea segmentului EF. Cum $D \in BM$, concludem că $[DE] \equiv [DF]$.

15. Se consideră triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) în care $m(\hat{A}) = 135°$. Fie $BD \perp AC$ ($D \in AC$), $DE \perp AB$ ($E \in AB$), $AF \perp BC$ ($F \in BC$) şi $\{O\} = DE \cap AF$. Arătaţi că O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

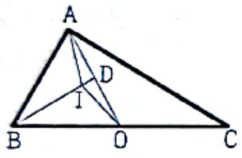
Soluţie



Întrucât $m(\widehat{DAB}) = 180° - m(\widehat{BAC})$, rezultă că $m(\widehat{DAB}) = 45°$. Remarcând şi faptul că $m(\widehat{BDA}) = 90°$, deducem că $m(\widehat{DBA}) = 45°$, deci $\widehat{DAB} \equiv \widehat{DBA}$, ceea ce implică $[DA] \equiv [DB]$. Cum $DE \perp BA$, rezultă că $[EA] \equiv [EB]$. Prin urmare, DE este mediatoarea segmentului AB. Având în vedere că $O \in DE$, concludem că $[OA] \equiv [OB]$. Deoarece $[AB] \equiv [AC]$ şi $AF \perp BC$, rezultă că AF este mediatoarea segmentului BC. Ţinând seama şi de faptul că $O \in AF$, deducem că $[OB] \equiv [OC]$. Deci, $[OA] \equiv [OB] \equiv [OC]$, ceea ce arată că cerinţa problemei a fost îndeplinită.

16. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90°$) în care $m(\hat{B}) = 60°$. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului şi I centrul cercului înscris în triunghi. Arătaţi că $[IA] \equiv [IO]$.

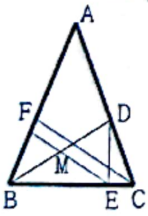
Soluţie



Deoarece triunghiul ABC este dreptunghic, iar O este centrul cercului circumscris triunghiului, rezultă că O este mijlocul lui $[BC]$ (căci $[BC]$ este ipotenuza triunghiului). Prin urmare, $[OB] \equiv [OC]$, de unde $[AO] \equiv [OB]$. Remarcând şi faptul că $m(\widehat{ABO}) = 60°$, deducem că triunghiul ABO este echilateral. Fie D mijlocul lui $[AO]$. Atunci, $[BD$ este atât bisectoarea unghiului ABO, cât şi mediatoarea segmentului AO. Cum $[BD$ este bisectoarea unghiului ABC, iar I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, rezultă că $I \in BD$ şi, cum BD este mediatoarea segmentului AO, concludem că $[IA] \equiv [IO]$.

17. Fie triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), $BD \perp AC$, $DE \perp BC$ ($D \in AC$ şi $E \in BC$) şi M mijlocul lui $[BD]$. Arătaţi că $EM \perp AB$.

Soluţie



Fie $CF \perp AB$ ($F \in AB$).

Întrucât $m(\widehat{DBC}) = 90° - m(\widehat{BCD})$, $m(\widehat{FCB}) = 90° - m(\widehat{CBF})$ şi $\widehat{BCD} \equiv \widehat{CBF}$ (căci $[AB] \equiv [AC]$ implică $\widehat{BCA} \equiv \widehat{CBA}$), rezultă că $\widehat{DBC} \equiv \widehat{FCB}$. Remarcând faptul că $m(\widehat{DEB}) = 90°$ şi $[MD] \equiv [MB]$, deducem că $[ME] \equiv [MB]$, de unde $\widehat{MEB} \equiv \widehat{MBE}$, ceea ce este totuna cu $\widehat{MEB} \equiv \widehat{DBC}$. Drept urmare, $\widehat{MEB} \equiv \widehat{FCB}$. Cum aceste unghiuri sunt corespondente, rezultă că $EM \parallel CF$. Ţinând seama şi de faptul că $CF \perp AB$, concludem că $EM \perp AB$.

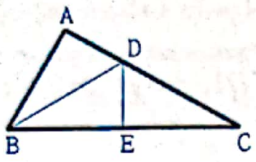
18. Se consideră triunghiul ABC în care $BC = 2AB$ şi $m(\hat{B}) = 2m(\hat{C})$. Determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului.

Soluţie

Fie $[BD$ bisectoarea unghiului ABC şi $DE \perp BC$ ($D \in AC$ şi $E \in BC$). Cum $m(\widehat{DBC}) = \frac{m(\widehat{ABC})}{2}$ şi $m(\widehat{ACB}) = \frac{m(\widehat{ABC})}{2}$, rezultă că $\widehat{DBC} \equiv \widehat{ACB}$, ceea ce

Scanned with OKEN Scanner

este totuna cu $\widehat{DBC} \equiv \widehat{DCB}$. Remarcând și faptul că $DE \perp BC$, deducem că $BE = EC = \frac{BC}{2}$. Întrucât $BA = \frac{BC}{2}$, conchidem că $[BA] \equiv [BE]$.

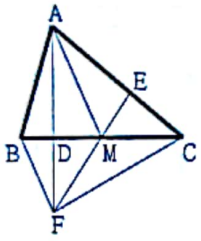


Deoarece $[BA] \equiv [BE]$, $\widehat{ABD} \equiv \widehat{EBD}$ și $[BD] \equiv [BD]$, rezultă că $\Delta ABD \equiv \Delta EBD$ (L.U.L.), de unde $\widehat{BAD} \equiv \widehat{BED}$. Cum $m(\widehat{BED}) = 90°$ (căci $DE \perp BE$), rezultă că $m(\widehat{BAD}) = 90°$, ceea ce este totuna cu $m(\widehat{BAC}) = 90°$. Drept urmare, $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 90°$, ceea ce, împreună cu $m(\hat{B}) = 2m(\hat{C})$, conduce la $3m(\hat{C}) = 90°$, de unde $m(\hat{C}) = 30°$. Deducem imediat că $m(\hat{B}) = 60°$.

19. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC. Fie D piciorul înălțimii din A, M mijlocul lui $[BC]$, E piciorul perpendicularei din M pe dreapta AC și $\{F\} = AD \cap ME$. Arătați că, dacă $\widehat{FAM} \equiv \widehat{CAM}$, atunci:
a) $[MC] \equiv [MF]$; b) $BF \parallel AM$.

O.M., etapa locală, Iași, 1996

Soluție



a) Deoarece $[AM$ este bisectoarea unghiului FAC, iar $MD \perp AF$ și $ME \perp AC$, rezultă că $[MD] \equiv [ME]$. Ținând seama și de faptul că $\widehat{CME} \equiv \widehat{FMD}$, conchidem că $\Delta CME \equiv \Delta FMD$, ceea ce implică $[MC] \equiv [MF]$.

b) Întrucât $[FM]$ este mediană în triunghiul FBC, iar $FM = \frac{BC}{2}$ (căci $FM = MC$, iar $MC = \frac{BC}{2}$), rezultă că $m(\widehat{BFC}) = 90°$, deci $BF \perp FC$. Deoarece $AF = AD + DF$, $AC = AE + EC$ și $AD = AE$ (fiindcă $\Delta AMD \equiv \Delta AME$), $DF = EC$ (căci $\Delta FMD \equiv \Delta CME$), rezultă că $[AF] \equiv [AC]$. Având în vedere și faptul că $\widehat{MAF} \equiv \widehat{MAC}$, deducem că $AM \perp FC$ (fiindcă într-un triunghi isoscel bisectoarea unghiului din vârful triunghiului este și înălțime). Așadar, $BF \perp FC$ și $AM \perp FC$, de unde $BF \parallel AM$.

20. Fie G centrul de greutate al triunghiului isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$). Arătați că, dacă $m(\widehat{BGC}) = 120°$, atunci triunghiul ABC este echilateral.

Soluție

Fie D mijlocul lui $[BC]$, E mijlocul lui $[CA]$ și F mijlocul lui $[AB]$. Întrucât $m(\widehat{CGE}) = 180° - m(\widehat{BGC})$, rezultă că $m(\widehat{CGE}) = 60°$. Deoarece $[AB] \equiv [AC]$, rezultă că $[BE] \equiv [CF]$ (căci într-un triunghi isoscel medianele corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente). Remarcând și faptul că $BG = \frac{2BE}{3}$, iar $CG = \frac{2CF}{3}$, deducem că $[BG] \equiv [CG]$, ceea ce, împreună cu $[DB] \equiv [DC]$, arată că $\widehat{BGD} \equiv \widehat{CGD}$, deci $m(\widehat{BGD}) = 60°$. Cum $\widehat{AGE} \equiv \widehat{BGD}$, rezultă că $m(\widehat{AGE}) = 60°$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $\widehat{CGE} \equiv \widehat{AGE}$. Ținând seama și de faptul că $[EC] \equiv [EA]$, conchidem că $GE \perp AC$, de unde $BE \perp CA$. În consecință, (în triunghiul BAC) $[BE]$ este atât mediană cât și înălțime, ceea ce implică $[BA] \equiv [BC]$. Rezultă că $[AB] \equiv [BC] \equiv [CA]$, deci triunghiul ABC este echilateral.

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME PROPUSE

1. Arătați că într-un triunghi dreptunghic neisoscel bisectoarea unghiului drept este și bisectoarea unghiului format de înălțimea și mediana ce pornesc din vârful unghiului drept.

2. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ în care $[AB] \equiv [BC] \equiv [CD]$, $m(\hat{B}) = 90°$ și $m(\hat{C}) = 60°$. Aflați $m(\hat{D})$.

3. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ în care $\hat{A} \equiv \hat{C}$. Fie E, F intersecțiile bisectoarei unghiului ABC cu AD, respectiv CD $(E \neq F)$. Arătați că triunghiul DEF este isoscel.
Indicație. Se folosește faptul că $m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{ABE}) + m(\widehat{AEB}) = 180°$ și $m(\widehat{BCF}) + m(\widehat{CBF}) + m(\widehat{CFB}) = 180°$.

4. Se consideră triunghiul isoscel ABC $([AB] \equiv [AC])$ în care $AB > BC$. Fie D intersecția bisectoarei unghiului ABC cu latura AC și punctul $E \in (BC$ astfel încât $[BE] \equiv [BA]$. Arătați că, dacă $[BD] \equiv [BC]$, atunci D este centrul cercului circumscris triunghiului ABE.

5. Fie triunghiul ABC, D mijlocul lui $[BC]$, E mijlocul lui $[AD]$ și $\{F\} = CE \cap AB$. Arătați că, dacă $[FD] \equiv [FA]$, atunci $BC = 2AC$.

6. Fie triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$, D mijlocul lui $[BC]$ și punctele $E \in (AB)$, $F \in (AC)$. Arătați că $AD \perp EF$ dacă și numai dacă $\widehat{AFE} \equiv \widehat{ABC}$.

7. Fie triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$, D mijlocul lui $[BC]$ și E intersecția perpendicularei în D pe BC cu latura AC. Arătați că, dacă $[ED] \equiv [EA]$, atunci $[AD] \equiv [AB]$.

8. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$ în care $m(\hat{B}) > m(\hat{C})$. Fie $AD \perp BC$ $(D \in BC)$ și E mijlocul lui $[BC]$. Arătați că $AE = 2AD$ dacă și numai dacă $m(\hat{C}) = 15°$.

9. Fie triunghiul isoscel ABC $([AB] \equiv [AC])$ și punctul $D \in (BC)$ astfel încât $3BD = BC$. Perpendiculara în D pe BC intersectează AB în E, iar paralela prin E la AC intersectează BC în F. Arătați că $[CF] \equiv [BD]$.

10. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC, iar D intersecția perpendicularei în B pe BA cu perpendiculara în C pe CA. Arătați că bisectoarea unghiului BAC este paralelă cu bisectoarea unghiului BDC.

11. Fie triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$ și $AD \perp BC$ $(D \in BC)$. Aflați $m(\hat{B})$ și $m(\hat{C})$, știind că $DC - DB = AB$.
Indicație. Se consideră punctul $E \in (DC)$ astfel încât $[ED] \equiv [DB]$ și se demonstrează că $[EC] \equiv [EA]$.

12. Determinați măsura fiecăruia dintre unghiurile unui triunghi isoscel ascuțitunghic, știind că lungimea uneia dintre laturile triunghiului este dublul lungimii înălțimii corespunzătoare respectivei laturi.

13. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC. Fie D piciorul înălțimii din A, E intersecția înălțimii din B cu perpendiculara în C pe CB și F intersecția înălțimii din C cu perpendiculara în B pe BC. Arătați că, dacă $[AD] \equiv [BC]$, atunci $ED \perp DF$.

14. Fie triunghiul dreptunghic isoscel ABC $([AB] \equiv [AC])$, D mijlocul lui $[BC]$, M un punct pe (BD),

Scanned with OKEN Scanner

iar $ME \perp AB$ şi $MF \perp AC$. Arătaţi că triunghiul DEF este dreptunghic isoscel.
Indicaţie. Se arată că $\triangle DEB \equiv \triangle DFA$ (L.U.L.).

15. Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC în care $AB < AC$. Fie $AD \perp BC$ $(D \in BC)$, E intersecţia bisectoarei unghiului DAC cu DC, $EF \perp AC$ $(F \in AC)$ şi $\{G\} = AD \cap EF$. Arătaţi că:
a) $[EG] \equiv [EC]$; b) dacă $[EB] \equiv [EC]$, atunci $GB \parallel AE$.

16. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$. O dreaptă prin C intersectează (AB) în D şi paralela prin B la AC în E. Arătaţi că, dacă $DE = 2BC$, atunci $m(\widehat{BCD}) = 2m(\widehat{ACD})$.
Indicaţie. Fie F mijlocul lui $[DE]$. Se arată că $[BF] \equiv [FE]$ şi că $[BF] \equiv [BC]$.

17. Fie triunghiul isoscel ABC $([AB] \equiv [AC])$, $AD \perp BC$ $(D \in BC)$ şi punctele $E \in (AB)$, $F \in (AC)$ astfel încât $\widehat{BDE} \equiv \widehat{CDF}$. Arătaţi că $AD \perp EF$.

18. Se consideră triunghiul isoscel ABC $([AB] \equiv [AC])$ în care $m(\hat{A}) = 120°$. Fie D mijlocul lui $[BC]$ şi punctul $E \in (AD$ astfel încât $AE = 4AD$. Arătaţi că $EB \perp BA$.
Indicaţie. Fie F mijlocul lui $[AE]$. Se arată că $\triangle FBE \equiv \triangle ABC$.

19. Fie triunghiul isoscel ABC $([AB] \equiv [AC])$ şi D mijlocul lui $[BC]$. Se consideră în interiorul triunghiului, de o parte şi de alta a dreptei AD, punctele M şi N astfel încât $\widehat{MAB} \equiv \widehat{NAC}$ şi $\widehat{MBA} \equiv \widehat{NCA}$. Fie $\{E\} = BM \cap CN$ şi F mijlocul lui $[MN]$. Arătaţi că:
a) $[DM] \equiv [DN]$; b) punctele A, D, E şi F sunt coliniare.

20. Se consideră triunghiul isoscel ABC $([AB] \equiv [AC])$. Pe laturile AB şi AC se construiesc triunghiurile echilaterale ABE şi ACF neavând puncte interioare comune cu triunghiul iniţial. Fie $\{O\} = BF \cap CE$. Arătaţi că:
a) $EF \parallel BC$; b) A, O şi mijloacele segmentelor BC, EF sunt puncte coliniare.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VI

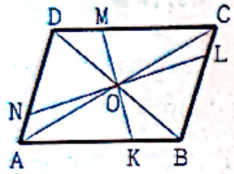
PATRULATERE

§1. PARALELOGRAMUL. LINIA MIJLOCIE ÎNTR – UN TRIUNGHI

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie paralelogramul $ABCD$ și punctele $K \in (AB)$, $L \in (BC)$, $M \in (CD)$, $N \in (DA)$. Arătați că, dacă $[AK] \equiv [CM]$ și $[BL] \equiv [DN]$, atunci dreptele AC, BD, KM și LN sunt concurente.

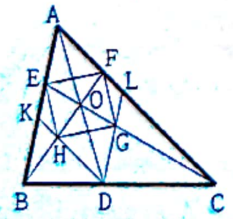
Soluție



Fie $\{O\} = AC \cap BD$; rezultă că $[OA] \equiv [OC]$ și $[OB] \equiv [OD]$. Întrucât $[AK] \equiv [CM]$, $[AO] \equiv [CO]$ și $\widehat{OAK} \equiv \widehat{OCM}$ (căci $AB \parallel CD$, iar unghiurile OAK și OCM sunt alterne interne), rezultă că $\Delta AOK \equiv \Delta COM$ (L.U.L.), de unde $\widehat{KOA} \equiv \widehat{MOC}$. Remarcând și faptul că semidreptele OK și OM sunt de o parte și de alta a dreptei AC, deducem că $[OK$ și $[OM$ sunt semidrepte opuse, deci $O \in KM$. Analog, arătăm că $O \in LN$. Cum $\{O\} = AC \cap BD$, conchidem că dreptele AC, BD, KM și LN sunt concurente.

2. Fie triunghiul ABC, D un punct pe (BC), O mijlocul lui $[AD]$, $\{E\} = AB \cap CO$ și $\{F\} = AC \cap BO$. Paralela prin D la AC intersectează BO în H, iar paralela prin D la AB intersectează CO în G. Arătați că patrulaterul $EFGH$ este paralelogram.

Soluție



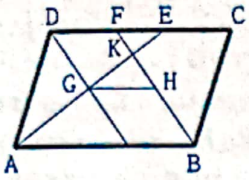
Fie $\{K\} = DH \cap AB$ și $\{L\} = DG \cap AC$. Deoarece patrulaterul $AKDL$ este paralelogram, iar $[OA] \equiv [OD]$, rezultă că O este centrul paralelogramului. Remarcând și faptul că $H \in (DK)$, $F \in (LA)$, iar punctele H, O și F sunt coliniare, deducem că $[OH] \equiv [OF]$. Analog, demonstrăm că $[OE] \equiv [OG]$. În consecință, patrulaterul $EFGH$ este paralelogram.

3. Se consideră paralelogramul $ABCD$ în care $AB > BC$. Fie E intersecția bisectoarei unghiului DAB cu latura CD, F intersecția bisectoarei unghiului CBA cu latura CD, G mijlocul lui $[AE]$ și H mijlocul lui $[BF]$. Arătați că patrulaterul $DFHG$ este paralelogram.

Soluție

Fie $\{K\} = AE \cap BF$ și $\{L\} = DG \cap AB$.

Întrucât $m(\widehat{KAB}) + m(\widehat{KBA}) = \dfrac{m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{CBA})}{2}$, iar $m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{CBA}) = 180°$, rezultă că $m(\widehat{KAB}) + m(\widehat{KBA}) = 90°$, de unde $m(\widehat{AKB}) = 90°$, ceea ce arată că

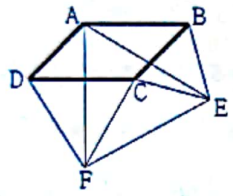


$BF \perp AE$. Remarcând faptul că $\widehat{DEA} \equiv \widehat{BAE}$ (căci $DC \parallel AB$) și $\widehat{BAE} \equiv \widehat{DAE}$, deducem că $\widehat{DEA} \equiv \widehat{DAE}$, deci triunghiul ADE este isoscel (de vârf D). Cum $[GA] \equiv [GE]$, rezultă că $DG \perp AE$, ceea ce este totuna cu $DL \perp AE$ și, cum $BF \perp AE$, conchidem că $DL \parallel BF$. Totodată, $LB \parallel DF$, deci patrulaterul $BFDL$ este paralelogram, de unde $[DL] \equiv [FB]$. Deoarece $\Delta GDE \equiv \Delta GLA$ (C.U.), rezultă că $[DG] \equiv [LG]$, ceea ce implică $DG = \frac{DL}{2}$. Având în vedere și faptul că $FH = \frac{FB}{2}$, deducem că $[DG] \equiv [FH]$. Cum $DG \parallel FH$, conchidem că patrulaterul $DFHG$ este paralelogram.

4. Pe laturile BC și CD ale paralelogramului $ABCD$ se construiesc în exteriorul său triunghiurile echilaterale BCE și CDF. Arătați că triunghiul AEF este echilateral.

Soluție

Deoarece $m(\widehat{ADF}) = m(\widehat{ADC}) + m(\widehat{CDF}) = m(\widehat{ADC}) + 60°$, $m(\widehat{EBA}) = m(\widehat{EBC}) + m(\widehat{CBA}) =$



$= 60° + m(\widehat{CBA})$ și $\widehat{ADC} \equiv \widehat{CBA}$ (fiind unghiuri opuse într-un paralelogram), rezultă că $\widehat{ADF} \equiv \widehat{EBA}$. Ținând seama și de faptul că $[AD] \equiv [EB]$ (căci $[AD] \equiv [BC]$ și $[BC] \equiv [EB]$), iar $[DF] \equiv [BA]$ (fiindcă $[DF] \equiv [CD]$ și $[CD] \equiv [BA]$), deducem că $\Delta ADF \equiv \Delta EBA$ (L.U.L.), ceea ce implică $[AF] \equiv [EA]$. Întrucât $m(\widehat{FCE}) = 360° - [m(\widehat{FCD}) + m(\widehat{DCB}) + m(\widehat{BCE})] = 360° - [120° + 180° - m(\widehat{ABC})] = 360° -$ $-[300° - m(\widehat{ABC})] = 60° + m(\widehat{ABC})$ și $m(\widehat{ABE}) = 60° + m(\widehat{ABC})$, rezultă că $\widehat{ABE} \equiv \widehat{FCE}$. Remarcând și faptul că $[BA] \equiv [CF]$, iar $[BE] \equiv [CE]$, conchidem că $\Delta ABE \equiv \Delta FCE$ (L.U.L.), de unde $[EA] \equiv [EF]$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $[AF] \equiv [EA] \equiv [EF]$, deci triunghiul AEF este echilateral.

5. Fie paralelogramul $ABCD$, K mijlocul lui $[AB]$, L mijlocul lui $[CD]$, $\{M\} = AL \cap DK$ și $\{N\} = BL \cap CK$. Arătați că:

a) patrulaterul $KMLN$ este paralelogram; b) $MN = \frac{AB}{2}$.

Soluție

a) Deoarece $AK \parallel LC$ și $[AK] \equiv [LC]$ (căci $AK = \frac{AB}{2}$, $LC = \frac{DC}{2}$ și $[AB] \equiv [DC]$), rezultă că patrulaterul $ALCK$ este paralelogram, ceea ce implică $AL \parallel CK$, de unde $ML \parallel NK$. Analog, arătăm că $MK \parallel LN$. Drept urmare, patrulaterul $KMLN$ este paralelogram.

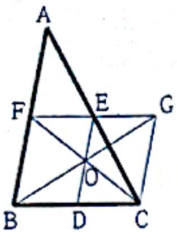
b) Întrucât patrulaterul $ADLK$ este paralelogram (fiindcă $AK \parallel DL$ și $[AK] \equiv [DL]$), iar $\{M\} = AL \cap KD$, rezultă că $[ML] \equiv [MA]$. Procedând în același mod, arătăm că $[NL] \equiv [NB]$. Prin urmare, $[MN]$ este linie mijlocie în triunghiul LAB, de unde $MN = \frac{AB}{2}$.

6. Fie triunghiul ABC, D mijlocul lui $[BC]$, E mijlocul lui $[CA]$, F mijlocul lui $[AB]$, G un punct pe $(FE$ astfel încât $FG = 2FE$ și $\{O\} = CF \cap BG$. Arătați că punctele D, O și E sunt coliniare.

Soluție

Întrucât $2FE = BC$ (căci $[FE]$ este linie mijlocie în triunghiul ABC) și $2FE = FG$, rezultă că $[FG] \equiv [BC]$. Totodată, $FG \parallel BC$ (fiindcă $FE \parallel BC$), deci

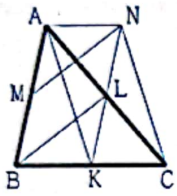
Scanned with OKEN Scanner



patrulaterul $BCGF$ este paralelogram, ceea ce implică $[OB] \equiv [OG]$ și $[OC] \equiv [OF]$ (căci $\{O\} = CF \cap BG$). Remarcând faptul că $[OD]$ este linie mijlocie în triunghiul CBF, iar $[OE]$ este linie mijlocie în triunghiul CAF, deducem că $OD \parallel FB$, respectiv $OE \parallel FA$. Cum $F \in AB$, conchidem că punctele D, O și E sunt coliniare.

7. **Fie triunghiul ABC, K mijlocul lui $[BC]$, L mijlocul lui $[CA]$, M mijlocul lui $[AB]$ și N intersecția paralelei prin M la BL cu dreapta KL. Arătați că $[MN] \equiv [BL]$ și $[NC] \equiv [AK]$.**

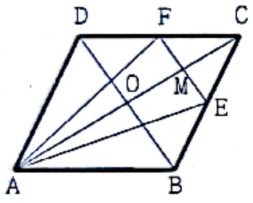
Soluție



Întrucât $[LK]$ este linie mijlocie în triunghiul ABC, rezultă că $LK \parallel AB$ și $LK = \frac{AB}{2}$. Remarcând faptul că $LN \parallel AB$ și $MN \parallel BL$, deducem că patrulaterul $BLNM$ este paralelogram, de unde $[MN] \equiv [BL]$ și $[LN] \equiv [MB]$. Deoarece $LN = \frac{AB}{2}$ (căci $LN = MB$ și $MB = \frac{AB}{2}$) și $LK = \frac{AB}{2}$, rezultă că $[LN] \equiv [LK]$. Totodată, $[LA] \equiv [LC]$, deci patrulaterul $ANCK$ este paralelogram, ceea ce implică $[NC] \equiv [AK]$.

8. **Fie O centrul paralelogramului $ABCD$, E mijlocul lui $[BC]$ și F mijlocul lui $[CD]$. Arătați că O este centrul de greutate al triunghiului AEF.**

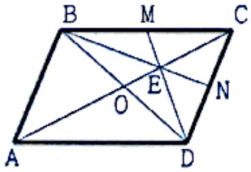
Soluție



Fie $\{M\} = AC \cap EF$.
Deoarece $[EF]$ este linie mijlocie în triunghiul CBD, O este mijlocul lui $[BD]$, iar $\{M\} = CO \cap EF$, rezultă că $[ME] \equiv [MF]$ și $[MC] \equiv [MO]$. Prin urmare, $OM = \frac{OC}{2}$, de unde $OM = \frac{OA}{2}$ (căci $[OC] \equiv [OA]$). Remarcând faptul că $[AM]$ este mediană în triunghiul AEF, că $O \in (AM)$ și că $OM = \frac{OA}{2}$, deducem că O este centrul de greutate al triunghiului AEF.

9. **Fie paralelogramul $ABCD$, M mijlocul laturii BC și N mijlocul laturii CD. Arătați că $DM \perp AC$ dacă și numai dacă $2BN = 3CD$.**

Soluție



Fie $\{O\} = AC \cap BD$ și $\{E\} = BN \cap DM$. Întrucât $[BN]$ și $[DM]$ sunt mediane în triunghiul BCD, rezultă că E este centrul de greutate al triunghiului, deci $BN = 3EN$.
1). Fie $DM \perp AC$. În aceste caz, triunghiul CED este dreptunghic în E. Cum $[EN]$ este mediana corespunzătoare ipotenuzei, rezultă că $EN = \frac{1}{2}CD$. Prin urmare, $BN = \frac{3}{2}CD$, de unde $2BN = 3CD$.
2). Reciproc, dacă $2BN = 3CD$, atunci $6EN = 3CD$, de unde $EN = \frac{1}{2}CD$, ceea ce, împreună cu faptul că $[EN]$ este mediana laturii CD a triunghiului CED, conduce la $m(\widehat{DEC}) = 90°$, deci $DM \perp AC$.

10. **Se consideră triunghiul ABC în care $BC > AB$. Fie D un punct pe (BC) astfel încât $[BD] \equiv [BA]$, E intersecția perpendicularei în D pe DA cu dreapta AB și $BF \perp AD$**

Scanned with OKEN Scanner

($F \in AD$). **Arătați că** $ED = 2BF$.

Soluție

Întrucât $BF \perp AD$ și $ED \perp AD$, rezultă că $BF \parallel ED$. Remarcând faptul că $[BD] \equiv [BA]$ și $BF \perp AD$, deducem că $[FA] \equiv [FD]$. Prin urmare, $[BF]$ este linie mijlocie în triunghiul ADE, de unde $ED = 2BF$.

11. Se consideră triunghiul ABC **în care** $BC = 2AB$. **Fie** D **mijlocul lui** $[BC]$ **și punctul** $E \in (AC)$ **astfel încât** $AE = 2EC$. **Arătați că** $ED \perp AD$.

Soluție

Fie F mijlocul lui $[AE]$ și $\{M\} = AD \cap BF$.

Întrucât $AE = 2EC$, iar F este mijlocul lui $[AE]$, rezultă că $[AF] \equiv [FE] \equiv [EC]$. Deducem că $[DE]$ este linie mijlocie în triunghiul CBF, ceea ce implică $DE \parallel BF$, de unde $MF \parallel DE$. Ținând seama și de faptul că $[AF] \equiv [FE]$, conchidem că $[MF]$ este linie mijlocie în triunghiul ADE, de unde $[MA] \equiv [MD]$. Totodată, $[BA] \equiv [BD]$ (căci $BD = \frac{BC}{2}$ și $BC = 2AB$), deci $BM \perp AD$, ceea ce este totuna cu $MF \perp AD$. Cum $MF \parallel ED$, rezultă că $ED \perp AD$.

12. Se consideră triunghiul ascuțitunghic și neisoscel ABC. **Fie** $BE \perp AC$, $CF \perp AB$, M **mijlocul lui** $[BC]$, N **mijlocul lui** $[CA]$ **și** P **mijlocul lui** $[AB]$. **Arătați că** $\triangle EMP \equiv \triangle MFN$.

Soluție

Remarcăm, mai întâi, că $EM = \frac{BC}{2}$ (căci $m(\widehat{BEC}) = 90°$ și $[MB] \equiv [MC]$), $EP = \frac{AB}{2}$ (fiindcă $m(\widehat{AEB}) = 90°$, iar $[PA] \equiv [PB]$) și $MP = \frac{CA}{2}$ (pentru că $[MP]$ este linie mijlocie în triunghiul ABC). Pe de altă parte, $MF = \frac{BC}{2}$, $MN = \frac{AB}{2}$ și $FN = \frac{CA}{2}$. Deci, $[EM] \equiv [MF]$, $[EP] \equiv [MN]$ și $[MP] \equiv [FN]$, de unde $\triangle EMP \equiv \triangle MFN$.

13. Fie triunghiul ABC, $AD \perp BC$ ($D \in BC$), E **mijlocul lui** $[BC]$, F **mijlocul lui** $[CA]$ **și** G **mijlocul lui** $[AB]$. **Aflați perimetrul patrulaterului** $DEFG$, **știind că** $BC = 12$ cm, $m(\hat{B}) = 60°$ **și** $\widehat{BAD} \equiv \widehat{ACB}$.

Soluție

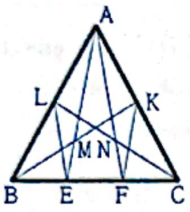
Deoarece $m(\widehat{BAD}) = 90° - m(\widehat{ABD}) = 30°$, rezultă că $m(\widehat{ACB}) = 30°$. Totodată, $m(\widehat{BAC}) = 180° - [m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ACB})]$, deci $m(\widehat{BAC}) = 90°$, ceea ce implică $AB = \frac{BC}{2}$, de unde $AB = 6$ cm. Remarcând faptul că $[EF]$ și $[FG]$ sunt linii mijlocii în triunghiul ABC, deducem că $EF = \frac{AB}{2}$ și $FG = \frac{BC}{2}$, ceea ce conduce la $EF = 3$ cm și $FG = 6$ cm. Întrucât $m(\widehat{ADB}) = 90°$ și $[GA] \equiv [GB]$, rezultă că $DG = \frac{AB}{2}$, de unde $DG = 3$ cm. Mai remarcăm și faptul că $BD = \frac{AB}{2} = 3$ cm. Având în vedere că $DE = BC - (BD + EC)$, iar $EC = \frac{BC}{2} = 6$ cm, deducem că $DE = 3$ cm. În consecință, $P_{DEFG} = 15$ cm.

14. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC **și punctele** E, $F \in (BC)$ **astfel încât** $[BE] \equiv [EF] \equiv$

Scanned with OKEN Scanner

$\equiv [FC]$. **Fie** $BK \perp AC$ $(K \in AC)$, L **intersecția bisectoarei unghiului** ACB **cu latura** AB, $\{M\} = AE \cap BK$ **și** $\{N\} = AF \cap CL$. **Arătați că, dacă** $[MB] \equiv [MK]$ **și** $[NC] \equiv [NL]$, **atunci triunghiul** ABC **este echilateral.**

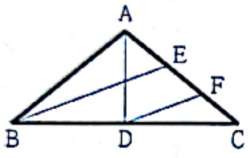
Soluție



Deoarece $[ME]$ este linie mijlocie în triunghiul BFK, rezultă că $ME \parallel KF$, de unde $KF \parallel AE$, ceea ce, împreună cu $[FE] \equiv [FC]$, implică $[KA] \equiv [KC]$. Remarcând și faptul că $BK \perp AC$, deducem că $[BA] \equiv [BC]$. Întrucât $NF \parallel LE$, rezultă că $LE \parallel AF$, ceea ce, împreună cu $[EF] \equiv [EB]$, conduce la $[LA] \equiv [LB]$. Ținând seama și de faptul că $[CL$ este bisectoarea unghiului ACB, deducem că $[CA] \equiv [CB]$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $[AB] \equiv [BC] \equiv [CA]$. Deci, triunghiul ABC este echilateral.

15. **Se consideră triunghiul isoscel** ABC $([AB] \equiv [AC])$ **în care** $m(\widehat{A}) = 108°$. **Fie** $AD \perp BC$ $(D \in BC)$ **și** E **intersecția bisectoarei unghiului** ABC **cu latura** AC. **Arătați că** $BE = 2AD$.

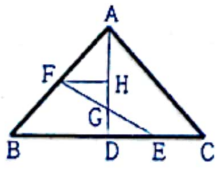
Soluție



Fie F mijlocul lui $[CE]$. Ținând seama și de faptul că D este mijlocul lui $[BC]$ (căci $[AB] \equiv [AC]$ și $AD \perp BC$ implică $[BD] \equiv [DC]$), deducem că $[DF]$ este linie mijlocie în triunghiul CBE, de unde $DF \parallel BE$ și $BE = 2DF$. Deoarece $\widehat{B} \equiv \widehat{C}$, rezultă că $m(\widehat{ABC}) = \dfrac{180° - m(\widehat{BAC})}{2} = 36°$. Prin urmare, $m(\widehat{ABE}) = 18°$. Remarcând că $m(\widehat{AEB}) = 180° - [m(\widehat{BAE}) + m(\widehat{ABE})]$, deducem că $m(\widehat{AEB}) = 54°$, ceea ce împreună cu $DF \parallel BE$, conduce la $m(\widehat{DFA}) = 54°$. Totodată, $m(\widehat{DAF}) = \dfrac{m(\widehat{BAC})}{2}$ (fiindcă $[AB] \equiv [AC]$ și $AD \perp BC$ implică $\widehat{DAC} \equiv \widehat{DAB}$), deci $\widehat{DAF} \equiv \widehat{DFA}$, de unde $[DF] \equiv [AD]$. Ca urmare a celor stabilite anterior, conchidem că $BE = 2AD$.

16. **Fie triunghiul dreptunghic isoscel** ABC $(m(\widehat{A}) = 90°)$, D **mijlocul lui** $[BC]$, E **mijlocul lui** $[CD]$, F **mijlocul lui** $[AB]$ **și** $\{G\} = AD \cap EF$. **Arătați că** $[GE] \equiv [GF]$ **și că** $8GD = BC$.

Soluție



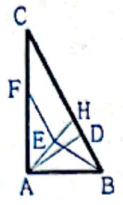
Fie H mijlocul lui $[AD]$. Întrucât $[FH]$ este linie mijlocie în triunghiul ABD, rezultă că $FH \parallel BD$ și $FH = \dfrac{BD}{2}$. Ținând seama de faptul că $[AB] \equiv [AC]$ și $AD \perp BC$, deducem că $[BD] \equiv [DC]$. Cum $DE = \dfrac{DC}{2}$, rezultă că $[FH] \equiv [DE]$. Remarcăm și faptul că $FH \perp AD$ (căci $FH \parallel BD$ și $AD \perp BD$). Drept urmare, $\Delta GFH \equiv \Delta GED$ (C.U.), de unde $[GF] \equiv [GE]$ și $[GH] \equiv [GD]$. Având în vedere că $HD = \dfrac{AD}{2}$, deducem că $GD = \dfrac{AD}{4}$. Totodată, $AD = \dfrac{BC}{2}$ (fiindcă $m(\widehat{BAC}) = 90°$ și $[BD] \equiv [DC]$), deci $GD = \dfrac{BC}{8}$, de unde $8GD = BC$.

17. **Se consideră triunghiul** ABC **dreptunghic în** A **și fie** D **piciorul înălțimii din** A, E **intersecția bisectoarei unghiului** ABC **cu bisectoarea unghiului** CAD, **iar** F **intersecția paralelei prin** E **la**

Scanned with OKEN Scanner

BC cu AC. Arătați că $EF = \frac{BC - AB}{2}$.

Soluție



Fie $\{H\} = AE \cap BC$.

Deoarece $m(\widehat{ABE}) = \frac{1}{2}m(\widehat{ABC})$, $m(\widehat{CAE}) = \frac{1}{2}m(\widehat{CAD})$, iar $\widehat{ABC} \equiv \widehat{CAD}$ (fiind unghiuri ascuțite cu laturile respectiv perpendiculare), rezultă că $\widehat{ABE} \equiv \widehat{CAE}$, ceea ce, împreună cu $m(\widehat{CAE}) + m(\widehat{EAB}) = 90°$, conduce la $m(\widehat{ABE}) + m(\widehat{EAB}) = 90°$, de unde $m(\widehat{AEB}) = 90°$. Prin urmare, $BE \perp AH$. Cum $\widehat{ABE} \equiv \widehat{HBE}$, rezultă că $[BH] \equiv [BA]$ și $[EA] \equiv [EH]$. Din $[EA] \equiv [EH]$ și $EF \parallel CH$ deducem că $[EF]$ este linie mijlocie în triunghiul ACH, deci $EF = \frac{CH}{2}$. Ținând seama și de faptul că $CH = BC - BH = BC - AB$, conchidem că $EF = \frac{BC - AB}{2}$.

PROBLEME PROPUSE

1. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$. Arătați că, dacă $AB \parallel CD$ și $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = 180°$, atunci patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

2. Fie D un punct pe latura BC a triunghiului ABC ($D \neq B$, $D \neq C$). Paralela prin D la AB și paralela prin D la AC intersectează paralela prin A la BC în E, respectiv F. Arătați că:
a) $\triangle DEF \equiv \triangle ABC$; b) patrulaterul $BCEF$ este paralelogram.

3. Se consideră paralelogramul $ABCD$ în care $m(\hat{A}) = 135°$. Fie punctul E pe perpendiculara în A la AD astfel încât $[AE] \equiv [AD]$ (E este situat în semiplanul limitat de dreapta AB și care nu conține punctul D). Arătați că $AB \perp DE$.

4. Fie paralelogramul $ABCD$ și E punctul de intersecție a bisectoarelor unghiurilor DAB și ABC. Arătați că, dacă $E \in (CD)$, atunci $AB = 2BC$.

5. Fie paralelogramul $ABCD$, E mijlocul lui $[AB]$, F mijlocul lui $[CD]$, $\{O\} = AC \cap BD$, $\{M\} = CE \cap BD$ și $\{N\} = AF \cap BD$. Arătați că $ON = \frac{BM}{2}$.

6. Fie O centrul paralelogramului $ABCD$ și punctele $E \in (AB)$, $F \in (CD)$ astfel încât $[AE] \equiv [CF]$. Arătați că $O \in EF$.

7. Fie O centrul paralelogramului $ABCD$. Arătați că orice dreaptă ce trece prin O împarte paralelogramul în două patrulatere având același perimetru.

8. Fie paralelogramul $ABCD$, E intersecția bisectoarelor unghiurilor BAD și ADC, iar F intersecția bisectoarelor unghiurilor ABC și BCD. Arătați că patrulaterul $BEDF$ este paralelogram și că centrul acestui paralelogram coincide cu centrul paralelogramului inițial.

9. Fie paralelogramul $ABCD$ și punctele $E \in (BC)$, $F \in (CD)$. Paralela prin C la AE intersectează AF în K și AD în L, iar paralela prin C la AF intersectează AE în M și AB în N. Arătați că dreptele EL, FN și KM sunt concurente.

10. Fie paralelogramul $ABCD$, E mijlocul lui $[AB]$, F mijlocul lui $[BC]$, G mijlocul lui $[CD]$, H mijlocul lui $[DA]$, $\{K\} = AF \cap DE$, $\{L\} = AF \cap BG$, $\{M\} = CH \cap BG$ și $\{N\} = CH \cap DE$.

Scanned with OKEN Scanner

Arătați că: a) patrulaterul $KLMN$ este paralelogram; b) dreptele AC, BD, KM și LN sunt concurente.

11. Se consideră paralelogramul $ABCD$ în care $m(\hat{A}) < 90°$. Fie $BE \perp AD$, $DF \perp BC$ ($E \in AD$, $F \in BC$), $\{G\} = BE \cap CD$ și $\{H\} = DF \cap AB$. Arătați că dreptele AC, BD, EF și GH sunt concurente.

12. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ în care $[AB] \equiv [AD]$ și $[CB] \equiv [CD]$. Fie K mijlocul lui $[AD]$, L mijlocul lui $[AC]$, M mijlocul lui $[BC]$ și $\{O\} = AC \cap BD$. Arătați că patrulaterul $KLMO$ este paralelogram.

13. Fie M un punct pe latura BC a triunghiului ABC ($M \neq B$, $M \neq C$), D mijlocul lui $[AM]$, E mijlocul lui $[AB]$ și F mijlocul lui $[AC]$. Arătați că $D \in EF$.

14. Fie triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), D mijlocul lui $[AB]$ și E intersecția paralelei prin D la AC cu latura BC. Arătați că $AE \perp BC$.

15. Se consideră triunghiul ABC în care $AB < BC$ și $AC < BC$. Fie punctele E, $F \in (BC)$ astfel încât $[BE] \equiv [AB]$, $[CF] \equiv [AC]$, iar $BM \perp AE$, $CN \perp AF$ ($M \in AE$, $N \in AF$). Arătați că $MN \parallel BC$.

16. Fie triunghiul ABC, D intersecția bisectoarei unghiului ABC cu latura AC, E intersecția paralelei prin D la BC cu dreapta AB, F intersecția bisectoarei unghiului BED cu BD și G mijlocul lui $[CD]$. Arătați că $2FG = BC$.

17. Se consideră triunghiul ABC în care $AB = 8$ cm și $AC = 10$ cm. Fie E mijlocul lui $[AB]$ și F mijlocul lui $[AC]$. Aflați BC, știind că $P_{BCFE} = 27$ cm.

18. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC, $AD \perp BC$ ($D \in BC$), E mijlocul lui $[BC]$, F mijlocul lui $[CA]$ și G mijlocul lui $[AB]$. Arătați că $\triangle DFG \equiv \triangle EGF$.

19. Se consideră triunghiul ABC în care $BC = 2AC$. Fie D mijlocul lui $[BC]$ și E mijlocul lui $[CD]$. Arătați că $2AE = AB$.

20. Fie triunghiul ABC, E mijlocul lui $[BC]$, F mijlocul lui $[CA]$ și D intersecția dreptei EF cu bisectoarea unghiului ABC. Arătați că $BD \perp DC$.

21. Fie paralelogramul $ABCD$, E mijlocul lui $[BC]$, F mijlocul lui $[CD]$, $\{K\} = AE \cap CD$ și $\{L\} = BF \cap AD$. Arătați că $LK = 2DE$.

22. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC, $AD \perp BC$ ($D \in BC$) și E mijlocul lui $[AC]$. Arătați că, dacă $[AD] \equiv [BE]$, atunci $m(\widehat{CBE}) = 30°$.

23. Fie triunghiul ABC, D mijlocul lui $[BC]$, E mijlocul lui $[AD]$ și $\{F\} = BE \cap AC$. Arătați că $3AF = AC$.

24. Se consideră triunghiul ABC în care $m(\hat{B}) = 15°$ și $m(\hat{C}) = 30°$. Fie $AD \perp BC$ ($D \in BC$), E mijlocul lui $[BC]$ și F mijlocul lui $[CA]$. Arătați că $[DA] \equiv [DE] \equiv [DF] \equiv [FA]$.

25. Fie triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90°$), $AD \perp BC$ ($D \in BC$), E mijlocul lui $[AB]$ și F intersecția bisectoarei unghiului ABC cu bisectoarea unghiului CAD. Arătați că $EF \parallel BC$.

Scanned with OKEN Scanner

§2. PARALELOGRAME PARTICULARE

PROBLEME REZOLVATE

1. **Fie paralelogramul $ABCD$, E mijlocul lui $[AB]$, F mijlocul lui $[BC]$ şi $\{O\} = AC \cap BD$. Arătaţi că $EO \perp OF$ dacă şi numai dacă $[OA] \equiv [OB]$.**

Soluţie

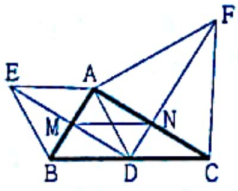
Întrucât $[OA] \equiv [OC]$ şi $[EA] \equiv [EB]$, rezultă că $[OE]$ este linie mijlocie în triunghiul ABC, de unde $OE \parallel CB$, ceea ce este totuna cu $OE \parallel FB$. Analog, arătăm că $OF \parallel EB$. Drept urmare, patrulaterul $OEBF$ este paralelogram.

1). Dacă $[OA] \equiv [OB]$, atunci $[AC] \equiv [BD]$ (căci $AC = 2OA$ şi $BD = 2OB$), deci patrulaterul $ABCD$ este dreptunghi. Rezultă că $m(\widehat{ABC}) = 90°$, ceea ce este totuna cu $m(\widehat{EBF}) = 90°$. Cum patrulaterul $OEBF$ este paralelogram, rezultă că acest patrulater este dreptunghi, de unde $EO \perp OF$.

2). Dacă $EO \perp OF$, atunci $m(\widehat{EOF}) = 90°$, de unde $m(\widehat{EBF}) = 90°$ (fiindcă în paralelogramul $OEBF$ unghiurile opuse sunt congruente). Prin urmare, $m(\widehat{ABC}) = 90°$, ceea ce arată că patrulaterul $ABCD$ este dreptunghi. Rezultă că $[AC] \equiv [BD]$, de unde $[OA] \equiv [OB]$.

2. **Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($m(\widehat{A}) = 90°$). Pe $[AB]$ şi $[AC]$ ca baze se construiesc triunghiurile isoscele ABE şi ACF neavând puncte interioare comune cu triunghiul iniţial. Fie D intersecţia bisectoarei unghiului AEB cu bisectoarea unghiului AFC. Arătaţi că $2AD = BC$.**

Soluţie



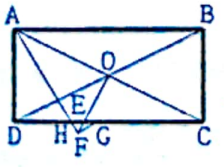
Fie $\{M\} = ED \cap AB$ şi $\{N\} = FD \cap AC$.

Deoarece triunghiul EAB este isoscel (de vârf E), iar $[ED$ este bisectoarea unghiului AEB, rezultă că $[MA] \equiv [MB]$ şi $EM \perp AB$. Analog, demonstrăm că $[NA] \equiv [NC]$ şi $FN \perp AC$. Având în vedere că $m(\widehat{MAN}) = m(\widehat{AMD}) = m(\widehat{AND}) = 90°$, patrulaterul $AMDN$ este dreptunghi, ceea ce implică $[AD] \equiv [MN]$. Remarcând şi faptul că $2MN = BC$ (căci $[MN]$ este linie mijlocie în triunghiul ABC), deducem că $2AD = BC$.

3. **Fie O centrul dreptunghiului $ABCD$. Perpendiculara în O pe AC intersectează latura CD în E şi bisectoarea unghiului DAC în F, iar perpendiculara în F pe FA intersectează CD în G. Arătaţi că, dacă $m(\widehat{ACD}) = 30°$, atunci:**

a) $FG \parallel BD$; **b)** $[EF] \equiv [EG]$.

Soluţie



a) Fie $\{H\} = AF \cap CD$.

Deoarece $m(\widehat{DAC}) = 90° - m(\widehat{ACD}) = 60°$, rezultă că $m(\widehat{DAH}) = 30°$, ceea ce implică $m(\widehat{AHD}) = 60°$, de unde $m(\widehat{FHG}) = 60°$. Remarcând şi faptul că $HF \perp FG$, deducem că $m(\widehat{FGH}) = 30°$. Pe de altă parte, $\widehat{ODC} \equiv \widehat{OCD}$ (căci $[OD] \equiv [OC]$), deci $m(\widehat{ODC}) = 30°$. Rezultă că $\widehat{FGH} \equiv \widehat{ODC}$, ceea ce implică $FG \parallel BD$ (fiindcă $\widehat{FGH}$ şi $\widehat{ODC}$ sunt unghiuri alterne interne).

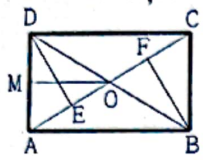
b) Întrucât $m(\widehat{OFA}) = 90° - m(\widehat{OAF}) = 60°$, rezultă că $m(\widehat{EFH}) = 60°$, de unde $m(\widehat{EFG}) = 30°$.

Scanned with OKEN Scanner

ceea ce conduce la $\widehat{EFG} \equiv \widehat{FGE}$, deci $[EF] \equiv [EG]$.

4. **Fie dreptunghiul $ABCD$, $DE \perp AC$ și $BF \perp AC$ ($E, F \in AC$). Arătați că, dacă $[EF] \equiv [AD]$, atunci unghiul ascuțit format de diagonalele dreptunghiului are măsura de $60°$.**

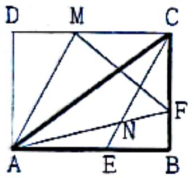
Soluție



Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Întrucât $m(\widehat{DEO}) = m(\widehat{BFO}) = 90°$, $[OD] \equiv [OB]$ și $\widehat{DOE} \equiv \widehat{BOF}$, rezultă că $\Delta DOE \equiv \Delta BOF$, ceea ce implică $[OE] \equiv [OF]$, de unde $EO = \frac{EF}{2}$, deci $EO = \frac{AD}{2}$. Fie M mijlocul lui $[AD]$. Cum $DM = \frac{AD}{2}$, rezultă că $[DM] \equiv [EO]$. Având în vedere că $MO \parallel AB$, deducem că $m(\widehat{DMO}) = m(\widehat{DAB})$, ceea ce implică $m(\widehat{DMO}) = 90°$. Se arată cu ușurință că $\Delta DMO \equiv \Delta DEO$ (I.C.), de unde $\widehat{MDO} \equiv \widehat{EOD}$, ceea ce este totuna cu $\widehat{ADO} \equiv \widehat{AOD}$ și, deci, $[AD] \equiv [AO]$. Ținând seama și de faptul că $[AO] \equiv [DO]$, conchidem că triunghiul AOD este echilateral, de unde $m(\widehat{AOD}) = 60°$.

5. **Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{B}) = 90°$) în care $AB > BC$. Fie punctele $E \in (AB)$ și $F \in (BC)$ astfel încât $[EA] \equiv [BC]$, iar $[FC] \equiv [BE]$. Aflați măsura unghiului ascuțit format de dreptele AF și CE.**

Soluție



Fie D intersecția paralelei prin A la BC cu paralela prin C la AB, M un punct pe (CD) astfel încât $[MC] \equiv [AE]$ și $\{N\} = AF \cap CE$. Evident, patrulaterul $ABCD$ este dreptunghi, iar patrulaterul $AECM$ este paralelogram. Drept urmare, $[AD] \equiv [BC]$, $m(\widehat{ADM}) = 90°$ și $AM \parallel EC$, $[AM] \equiv [EC]$. Deoarece $AM \parallel CE$, iar unghiurile $\widehat{CNF}$ și $\widehat{MAF}$ sunt corespondente, rezultă că $\widehat{CNF} \equiv \widehat{MAF}$. Întrucât $\Delta CFM \equiv \Delta BEC$ (C.C.), rezultă că $[MF] \equiv [CE]$ și $\widehat{CMF} \equiv \widehat{BCE}$. Totodată, $m(\widehat{BEC}) + m(\widehat{BCE}) = 90°$ (căci triunghiul BCE este dreptunghic în B), deci $m(\widehat{BEC}) + m(\widehat{CMF}) = 90°$. Remarcând și faptul că $\widehat{BEC} \equiv \widehat{DMA}$ (unghiuri cu laturile respectiv paralele), conchidem că $m(\widehat{DMA}) + m(\widehat{CMF}) = 90°$, ceea ce implică $m(\widehat{AMF}) = 90°$. Ținând seama și de faptul că $[MA] \equiv [MF]$ (fiindcă $[MA] \equiv [CE]$ și $[CE] \equiv [MF]$), deducem că $m(\widehat{MAF}) = 45°$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $m(\widehat{CNF}) = 45°$, iar rezolvarea problemei este încheiată.

6. **Fie triunghiul ABC, D intersecția bisectoarei unghiului ABC cu latura AC și E, F intersecțiile mediatoarei segmentului BD cu AB, respectiv cu BC. Arătați că patrulaterul $BEDF$ este romb.**

Soluție

Întrucât E și F sunt puncte ale mediatoarei segmentului BD, rezultă că $[EB] \equiv [ED]$ și $[FB] \equiv [FD]$. Remarcând faptul că $\widehat{EBD} \equiv \widehat{FBD}$ și $BD \perp EF$, deducem că $[EB] \equiv [FB]$. Drept urmare, $[EB] \equiv [BF] \equiv [FD] \equiv [DE]$, ceea ce arată că patrulaterul $BEDF$ este romb.

7. **Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ în care $[AC] \equiv [BD]$. Fie K mijlocul lui $[AB]$, L mijlocul lui $[BC]$, M mijlocul lui $[CD]$ și N mijlocul lui $[DA]$. Arătați că patrulaterul $KLMN$ este romb.**

Scanned with OKEN Scanner

Soluție

Deoarece $[LK]$ este linie mijlocie în triunghiul BCA, rezultă că $LK \parallel AC$ și $LK = \frac{AC}{2}$. Având în vedere că $[MN]$ este linie mijlocie în triunghiul DAC, deducem că $MN \parallel AC$ și $MN = \frac{AC}{2}$. Drept urmare, $LK \parallel MN$ și $[LK] \equiv [MN]$. Ținând seama și de faptul că $[LK] \equiv [LM]$ (căci $LM = \frac{BD}{2}$ și $[BD] \equiv [AC]$), conchidem că patrulaterul $KLMN$ este romb.

8. **Fie paralelogramul $ABCD$, E mijlocul lui $[AB]$, F mijlocul lui $[BC]$ și $\{O\} = AC \cap BD$. Arătați că $[OE] \equiv [OF]$ dacă și numai dacă $\widehat{BAC} \equiv \widehat{DAC}$.**

Soluție

Să demonstrăm implicația : dacă $\widehat{BAC} \equiv \widehat{DAC}$, atunci $[OE] \equiv [OF]$. Deoarece patrulaterul $ABCD$ este paralelogram, iar $[AC$ este bisectoarea unghiului BAD, rezultă că acest patrulater este chiar romb, deci $[AB] \equiv [BC]$. Remarcând faptul că $[OA] \equiv [OC]$ și $[EA] \equiv [EB]$, deducem că $[OE]$ este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci $OE = \frac{BC}{2}$. Analog, arătăm că $OF = \frac{AB}{2}$. Drept urmare, $[OE] \equiv [OF]$.

Să demonstrăm implicația : dacă $[OE] \equiv [OF]$, atunci $\widehat{BAC} \equiv \widehat{DAC}$. Întrucât $OE = \frac{BC}{2}$, $OF = \frac{AB}{2}$ și $[OE] \equiv [OF]$, rezultă că $[BC] \equiv [AB]$, deci patrulaterul $ABCD$ este romb, ceea ce conduce la $\widehat{BAC} \equiv \widehat{DAC}$.

9. **Se consideră rombul $ABCD$ în care $m(\hat{A}) < 90°$. Fie $BE \perp AD$ și $BF \perp CD$ ($E \in AD$, $F \in CD$). Arătați că $EF \parallel AC$ și $EF = \frac{AC}{2}$ dacă și numai dacă $m(\hat{A}) = 60°$.**

Soluție

Să demonstrăm implicația : dacă $m(\hat{A}) = 60°$, atunci $EF \parallel AC$ și $EF = \frac{AC}{2}$. Întrucât $[AB] \equiv [AD]$ și $m(\widehat{BAD}) = 60°$, rezultă că triunghiul ABD este echilateral, de unde $[EA] \equiv [ED]$ (căci $BE \perp AD$). Analog, arătăm că $[FD] \equiv [FC]$. Prin urmare, $[EF]$ este linie mijlocie în triunghiul DAC, ceea ce implică $EF \parallel AC$ și $EF = \frac{AC}{2}$.

Să demonstrăm implicația : dacă $EF \parallel AC$ și $EF = \frac{AC}{2}$, atunci $m(\hat{A}) = 60°$. Deoarece $EF \parallel AC$ și $EF = \frac{AC}{2}$, rezultă că $[EF]$ este linie mijlocie în triunghiul DAC, deci $[EA] \equiv [ED]$. Remarcând și faptul că $BE \perp AD$, deducem că $[BA] \equiv [BD]$. Cum $[BA] \equiv [AD]$, rezultă că triunghiul ABD este echilateral, de unde $m(\hat{A}) = 60°$.

10. **Se consideră triunghiul ABC în care $AB = AC = 2BC$. Fie D un punct pe (AC) astfel încât $AD = 3DC$, E intersecția bisectoarei unghiului ACB cu latura AB, F mijlocul lui $[AC]$ și $\{G\} = BD \cap CE$. Arătați că patrulaterul $BEFG$ este romb.**

Soluție

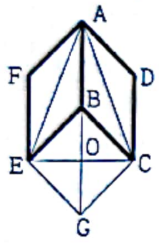
Fie $\{O\} = BF \cap CE$ și H mijlocul lui $[AB]$.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $[CF] \equiv [CB]$ și $\widehat{FCO} \equiv \widehat{BCO}$, rezultă că $[OB] \equiv [OF]$ și $CO \perp BF$. Remarcând faptul că $AD = 3DC$, deducem că $CD = \frac{AC}{4} = \frac{BC}{2}$. Totodată, $FH \parallel BC$ și $FH = \frac{BC}{2}$ (căci $[FH]$ este linie mijlocie în triunghiul ABC). Prin urmare, $[CD] \equiv [FH]$ și $\widehat{DCB} \equiv \widehat{HFA}$. Ținând seama și de faptul că $[CB] \equiv [FA]$, conchidem că $\Delta CDB \equiv \Delta FHA$, de unde $[BD] \equiv [AH]$, ceea ce implică $[BD] \equiv [BH]$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $\Delta BFD \equiv \Delta BFH$ (L.L.L.), de unde $\widehat{DBF} \equiv \widehat{HBF}$, ceea ce este totuna cu $\widehat{GBO} \equiv \widehat{EBO}$. Cum $BO \perp EG$, rezultă că $[OG] \equiv [OE]$. Pe de altă parte, $[OB] \equiv [OF]$ și $BF \perp EG$, deci patrulaterul $BEFG$ este romb.

11. Se consideră romburile $ABCD$ și $ABEF$ (neavând puncte interioare comune) în care $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ABE}) = 135°$. Fie $\{O\} = AB \cap CE$ și G un punct pe $(BO$ astfel încât $BG = 2BO$. Arătați că patrulaterul $BCGE$ este pătrat.

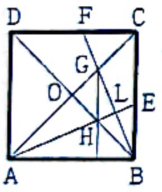
Soluție



Deoarece $[BA] \equiv [BA]$, $[BC] \equiv [BE]$ și $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ABE}$, rezultă că $\Delta ABC \equiv \Delta ABE$, de unde $[AC] \equiv [AE]$ și $\widehat{BAC} \equiv \widehat{BAE}$. Drept urmare, $AO \perp CE$ și $[OC] \equiv [OE]$. Remarcând și faptul că $[OB] \equiv [OG]$ (căci $O \in BG$ și $BG = 2BO$), deducem că patrulaterul $BCGE$ este romb. Totodată, $m(\widehat{EBC}) = 360° - [m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ABE})] = 90°$, deci patrulaterul $BCGE$ este pătrat.

12. Fie O centrul pătratului $ABCD$, punctele $E \in (BC)$ și $F \in (CD)$ astfel încât $[BE] \equiv [CF]$, iar $\{G\} = BF \cap AC$ și $\{H\} = AE \cap BD$. Arătați că $GH \perp AB$.

Soluție

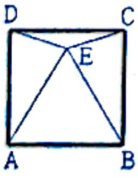


Fie $\{L\} = AE \cap BF$.

Întrucât $\Delta ABE \equiv \Delta BCF$ (C.C.), rezultă că $\widehat{BAE} \equiv \widehat{CBF}$, ceea ce este totuna cu $\widehat{BAL} \equiv \widehat{EBL}$. Totodată, $m(\widehat{EBL}) + m(\widehat{ABL}) = 90°$, deci $m(\widehat{BAL}) + m(\widehat{ABL}) = 90°$, de unde $m(\widehat{ALB}) = 90°$. Prin urmare, $AL \perp BG$. Remarcând și faptul că $BO \perp AG$, iar $AL \cap BO = \{H\}$, conchidem că punctul H este ortocentrul ΔABG, ceea ce implică $GH \perp AB$.

13. Fie E un punct în interiorul pătratului $ABCD$ astfel încât $[EC] \equiv [ED]$ și $m(\widehat{AEB}) = 60°$. Aflați $m(\widehat{CED})$.

Soluție

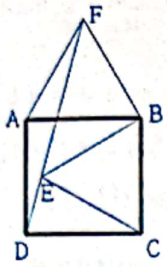


Deoarece $[EC] \equiv [ED]$, rezultă că $\widehat{ECD} \equiv \widehat{EDC}$. Remarcând și faptul că $m(\widehat{ECB}) = 90° - m(\widehat{ECD})$, iar $m(\widehat{EDA}) = 90° - m(\widehat{EDC})$, deducem că $\widehat{ECB} \equiv \widehat{EDA}$. Totodată, $[CE] \equiv [DE]$ și $[CB] \equiv [DA]$, deci $\Delta BCE \equiv \Delta ADE$, ceea ce implică $[EB] \equiv [EA]$. Cum $m(\widehat{AEB}) = 60°$, rezultă că ΔEAB este echilateral, de unde $m(\widehat{EAB}) = 60°$ și $[EA] \equiv [AB]$. Deducem că $m(\widehat{EAD}) = 30°$ și $[AE] \equiv [AD]$. Drept urmare, $m(\widehat{ADE}) = 75°$, ceea ce conduce la $m(\widehat{EDC}) = 15°$. Rezultă că $m(\widehat{CED}) = 150°$.

14. Pe laturile AB și BC ale pătratului $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABF și BCE (E în interiorul pătratului și F în exteriorul pătratului). Arătați că punctele D, E și F sunt coliniare.

Scanned with OKEN Scanner

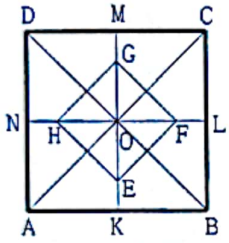
Soluție



Întrucât $\widehat{CDE} \equiv \widehat{CED}$ (căci $[CD] \equiv [CE]$), iar $m(\widehat{DCE}) = 30°$ (fiindcă $m(\widehat{DCE}) = 90° - m(\widehat{BCE})$ și $m(\widehat{BCE}) = 60°$), rezultă că $m(\widehat{DEC}) = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$. Remarcând faptul că $\widehat{BEF} \equiv \widehat{BFE}$ (căci $[BE] \equiv [BF]$), iar $m(\widehat{EBF}) = 90°$ (fiindcă $m(\widehat{EBF}) = m(\widehat{EBA}) + m(\widehat{ABF})$ și $m(\widehat{EBA}) = 30°$, $m(\widehat{ABF}) = 60°$), deducem că $m(\widehat{BEF}) = 45°$. Drept urmare, $m(\widehat{DEC}) + m(\widehat{CEB}) + m(\widehat{BEF}) = 180°$, ceea ce arată că punctele D, E și F sunt coliniare.

15. Fie O centrul pătratului $ABCD$, iar E centrul de greutate al triunghiului OAB, F centrul de greutate al triunghiului OBC, G centrul de greutate al triunghiului OCD și H centrul de greutate al triunghiului ODA. Arătați că patrulaterul $EFGH$ este pătrat.

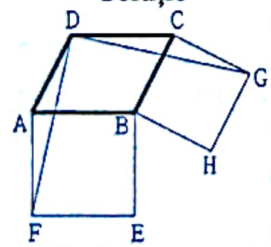
Soluție



Fie a lungimea uneia dintre laturile pătratului $ABCD$. K mijlocul lui $[AB]$, L mijlocul lui $[BC]$, M mijlocul lui $[CD]$ și N mijlocul lui $[DA]$. Evident, atât punctele K, O, M, cât și punctele L, O, N sunt coliniare. Remarcăm și faptul că $OK = OL = OM = ON = \frac{a}{2}$. Deoarece E este centrul de greutate al triunghiului OAB, rezultă că $E \in (OK)$ și că, $OE = \frac{2OK}{3} = \frac{a}{3}$. Analog, arătăm că $F \in (OL)$, $G \in (OM)$, $H \in (ON)$ și că $OF = OG = OH = \frac{a}{3}$. Drept urmare, $[OE] \equiv [OF] \equiv [OG] \equiv [OH]$, ceea ce arată că patrulaterul $EFGH$ este dreptunghi. Ținând seama și de faptul că $EG \perp FH$ (căci $KM \parallel BC$, $LN \parallel AB$ și $BC \perp AB$ implică $KM \perp LN$), deducem că patrulaterul $EFGH$ este pătrat.

16. Fie paralelogramul $ABCD$ și pătratele $ABEF$, $BCGH$ neavând puncte interioare comune cu paralelogramul. Arătați că $FD \perp DG$.

Soluție



Întrucât $m(\widehat{FAD}) = 90° + m(\widehat{BAD})$, $m(\widehat{DCG}) = m(\widehat{DCB}) + 90°$ și $\widehat{BAD} \equiv \widehat{DCB}$, rezultă că $\widehat{FAD} \equiv \widehat{DCG}$. Totodată, $[AF] \equiv [CD]$ și $[AD] \equiv [CG]$, deci $\Delta AFD \equiv \Delta CDG$, de unde $\widehat{AFD} \equiv \widehat{CDG}$. Pe de altă parte, $m(\widehat{FDG}) = m(\widehat{ADC}) - [m(\widehat{ADF}) + m(\widehat{CDG})]$, ceea ce conduce la $m(\widehat{FDG}) = m(\widehat{ADC}) - [m(\widehat{ADF}) + m(\widehat{AFD})]$. Remarcând și faptul că $m(\widehat{ADC}) = 180° - m(\widehat{DAB})$, iar $m(\widehat{ADF}) + m(\widehat{AFD}) = 180° - m(\widehat{DAF})$, deducem că $m(\widehat{FDG}) = m(\widehat{DAF}) - m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{BAF}) = 90°$. Drept urmare, $FD \perp DG$.

PROBLEME PROPUSE

1 Fie dreptunghiul $ABCD$, K mijlocul lui $[AB]$, L mijlocul lui $[BC]$, M mijlocul lui $[CD]$ și N mijlocul lui $[DA]$. Arătați că $P_{KLMN} = 2AC$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Fie paralelogramul $ABCD$, E mijlocul lui $[AB]$ și F mijlocul lui $[BC]$. Arătați că, dacă $EF = \frac{BD}{2}$, atunci $m(\widehat{ABC}) = 90°$.

3. Fie dreptunghiul $ABCD$ și punctele $E \in (AB)$, $F \in (BC)$, $G \in (CD)$ și $H \in (DA)$. Arătați că patrulaterul $EFGH$ este dreptunghi dacă și numai dacă $\widehat{AEH} \equiv \widehat{BFE} \equiv \widehat{CGF} \equiv \widehat{DHG}$.

4. Fie H ortocentrul triunghiului ascuțitunghic ABC, K mijlocul lui $[AB]$, L mijlocul lui $[BC]$, M mijlocul lui $[CH]$ și N mijlocul lui $[HA]$. Arătați că patrulaterul $KLMN$ este dreptunghi.

5. Fie paralelogramul $ABCD$, M mijlocul lui $[AB]$, E punctul de intersecție a bisectoarelor unghiurilor DAB și CBA, iar F punctul în care paralela prin A la BE intersectează EM. Arătați că $[EF] \equiv [CD]$.

6. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ în care $2AB = 3AD$. Fie $E \in (AB)$ astfel încât $EB = 2EA$ și F mijlocul lui $[AD]$. Arătați că:
a) $FE \perp EC$; b) $2EF = EC$.

7. Fie O centrul paralelogramului $ABCD$, $OE \perp AB$ și $OF \perp BC (E \in AB, F \in BC)$. Arătați că $[OE] \equiv [OF]$ dacă și numai dacă patrulaterul $ABCD$ este romb.

8. Se consideră paralelogramul $ABCD$. Mediatoarea diagonalei BD intersectează AB în E și CD în F. Arătați că patrulaterul $BFDE$ este romb.

9. Se consideră patrulaterul convex ortodiagonal $ABCD$. Arătați că, dacă $\widehat{ABD} \equiv \widehat{CBD}$ și $\widehat{BCA} \equiv \widehat{DCA}$, atunci patrulaterul $ABCD$ este romb.

10. Se consideră rombul $ABCD$ în care $m(\widehat{ABC}) = 120°$. Fie E mijlocul lui $[DA]$ și F intersecția bisectoarei unghiului BDC cu latura BC. Arătați că $[EF] \equiv [BD]$.

11. Fie paralelogramul $ABCD$. Arătați că, dacă $P_{ABCD} = 4AB$, atunci $AC \perp BD$.

12. Se consideră rombul $ABCD$ în care $m(\hat{A}) < 90°$. Fie $BE \perp CD$, $BF \perp DA$, $DG \perp AB$, $DH \perp BC$ $(E \in CD, F \in DA, G \in AB, H \in BC)$, $\{K\} = BE \cap DH$ și $\{L\} = BF \cap DG$. Arătați că:
a) $K, L \in AC$; b) patrulaterul $BKDL$ este romb.

13. Fie paralelogramul $ABCD$, $\{O\} = AC \cap BD$, E mijlocul lui $[AB]$ și F mijlocul lui $[BC]$. Arătați că $[OE] \equiv [OF]$ și $EO \perp OF$ dacă și numai dacă $[AC] \equiv [BD]$ și $AC \perp BD$.

14. Fie paralelogramul $ABCD$, E mijlocul lui $[AB]$ și F mijlocul lui $[BC]$. Arătați că, dacă $EF \perp BD$ și $EF = \frac{BD}{2}$, atunci patrulaterul $ABCD$ este pătrat.

15. Fie E și F două puncte pe diagonala BD a pătratului $ABCD$. Arătați că, dacă $[BE] \equiv [DF]$, atunci patrulaterul $AECF$ este romb.

16. Fie triunghiul isoscel ABC $([AB] \equiv [AC])$, D mijlocul lui $[BC]$, $DE \perp AB$, $DF \perp AC$ și $BG \perp DF$ $(E \in AB, F \in AC$ și $G \in DF)$. Arătați că $[EG] \equiv [AD]$.

Scanned with OKEN Scanner

17. Fie pătratul $ABCD$, E mijlocul lui $[BC]$, F mijlocul lui $[CD]$ și G mijlocul lui $[DA]$. Arătați că triunghiul EFG este dreptunghic isoscel.

18. Fie pătratul $ABCD$ și punctele $E \in (BC)$, $F \in (CD)$ astfel încât triunghiul AEF să fie echilateral. Aflați $m(\widehat{BAE})$.

19. Se consideră triunghiul echilateral ABC și pătratele $ABDE$, $ACFG$ neavând puncte interioare comune cu triunghiul. Fie M mijlocul lui $[BC]$. Arătați că $AM \perp EG$.

20. Fie pătratul $ABCD$ și punctele $E \in (AB)$, $F \in (BC)$, $G \in (CD)$, $H \in (DA)$ astfel încât $[AH] \equiv [AE] \equiv [CF] \equiv [CG]$. Arătați că patrulaterul $EFGH$ este dreptunghi și că $P_{EFGH} = 2AC$.

21. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ în care $AB = 2BC$. Fie E intersecția bisectoarelor unghiurilor DAB și CBA, F intersecția bisectoarelor unghiurilor ADC și BCA, $\{G\} = BE \cap CF$ și $\{H\} = AE \cap DF$. Arătați că:

a) $E \in (CD)$, $F \in (AB)$; b) patrulaterul $EHFG$ este pătrat.

22. Se consideră pătratele $ABCD$ și $DEFG$ astfel situate încât $E \in (CD)$ și $D \in (AG)$. Fie punctele $K \in (AD)$ și $L \in (DC$ astfel încât $C \in (LD)$ și $[AK] \equiv [CL] \equiv [DE]$. Arătați că patrulaterul $BKFL$ este pătrat.

Scanned with OKEN Scanner

§3. SIMETRIA FAȚĂ DE UN PUNCT. SIMETRIA FAȚĂ DE O DREAPTĂ

PROBLEME REZOLVATE

1. **Fie triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90°$), O mijlocul laturii BC și D simetricul lui A față de O. Arătați că $BD \perp DC$.**

Soluție

Deoarece $[OB] \equiv [OC]$, $[OA] \equiv [OD]$ (căci D este simetricul lui A față de O), iar $m(\widehat{BAC}) = 90°$, rezultă că patrulaterul $ABDC$ este dreptunghi, de unde $m(\widehat{BDC}) = 90°$ și, deci, $BD \perp DC$.

2. **Fie triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), D mijlocul lui $[BC]$, E intersecția bisectoarei unghiului BAD cu BD, F intersecția bisectoarei unghiului CAD cu CD și G simetricul lui A față de D. Arătați că $FG \parallel AE$.**

Soluție

Întrucât $[AB] \equiv [AC]$ și $[DB] \equiv [DC]$, rezultă că $\widehat{BAD} \equiv \widehat{CAD}$ și $AD \perp BC$. Remarcând faptul că $m(\widehat{EAD}) = \frac{1}{2} m(\widehat{BAD})$ și $m(\widehat{FAD}) = \frac{1}{2} m(\widehat{CAD})$, deducem că $\widehat{EAD} \equiv \widehat{FAD}$, ceea ce, împreună cu $AD \perp EF$, conduce la $[DE] \equiv [DF]$. Totodată, $[DA] \equiv [DG]$ (căci G este simetricul lui A față de D), deci patrulaterul $EAFG$ este paralelogram, de unde $FG \parallel AE$.

3. **Fie triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90°$) în care $m(\hat{B}) = 60°$, $AD \perp BC$ ($D \in BC$) și E simetricul lui B față de D. Arătați că E este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.**

Soluție

Deoarece $[DB] \equiv [DE]$ (căci E este simetricul lui B față de D) și $AD \perp BE$, rezultă că $[AB] \equiv [AE]$, ceea ce, împreună cu $m(\widehat{ABE}) = 60°$, arată că triunghiul ABE este echilateral, de unde $[EA] \equiv [EB]$ și $m(\widehat{AEB}) = 60°$. Remarcând faptul că $m(\widehat{ACE}) = 30°$ (fiindcă $m(\widehat{ACB}) = 90° - m(\widehat{ABC})$), iar $m(\widehat{AEB}) = m(\widehat{ACE}) + m(\widehat{CAE})$, deducem că $m(\widehat{CAE}) = 30°$. Prin urmare, $\widehat{ACE} \equiv \widehat{CAE}$, de unde $[EA] \equiv [EC]$. Rezultă că $[EA] \equiv [EB] \equiv [EC]$, deci E este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

4. **Arătați că punctul de intersecție a diagonalelor unui paralelogram este centrul de simetrie al paralelogramului.**

Soluție

Fie $ABCD$ paralelogramul considerat, $\{O\} = AC \cap BD$, d o dreaptă ce trece prin O și $\{M\} = d \cap AB$, $\{N\} = d \cap CD$. Întrucât $[OA] \equiv [OC]$, $\widehat{AOM} \equiv \widehat{CON}$ și $\widehat{OAM} \equiv \widehat{OCN}$ (căci $AB \parallel CD$), rezultă că $\Delta OAM \equiv \Delta OCN$, de unde $[OM] \equiv [ON]$. Drept urmare, punctele M și N sunt simetrice față de O, iar cerința enunțului a fost îndeplinită.

5. **Arătați că diagonalele unui romb sunt axe de simetrie ale rombului.**

Soluție

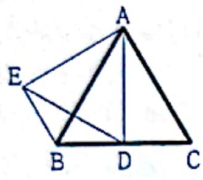
Fie $ABCD$ rombul considerat, $\{O\} = AC \cap BD$, M un punct pe (AC), iar L și N punctele în care paralela prin M la BD intersectează AB.

Scanned with OKEN Scanner

respectiv AD. Deoarece $LN \parallel BD$ și $BD \perp AC$, rezultă că $LN \perp AC$. Remarcând faptul că (în triunghiul ABD) $[AO]$ este mediana corespunzătoare laturii BD, că $LM \parallel BD$, iar $LN \cap AO = \{M\}$, deducem că $[ML] \equiv [LN]$. Deci, punctele L și N sunt simetrice față de dreapta AC, ceea ce arată că AC este axă de simetrie pentru romb. Analog, arătăm că și BD este axă de simetrie pentru romb.

6. **Fie triunghiul echilateral ABC, D mijlocul lui $[BC]$, E simetricul lui D față de AB. Arătați că triunghiul ABE este dreptunghic și că triunghiul ADE este echilateral.**

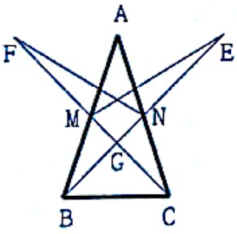
Soluție



Întrucât E este simetricul lui D față de AB, rezultă că $[AE] \equiv [AD]$ și $[BE] \equiv [BD]$. Drept urmare, $\triangle ABE \equiv \triangle ABD$ (L.L.L.), de unde $\widehat{AEB} \equiv \widehat{ADB}$. Remarcând și faptul că $m(\widehat{ADB}) = 90°$ (căci $[AB] \equiv [AC]$ și $[DB] \equiv [DC]$ implică $AD \perp BC$), deducem că $m(\widehat{AEB}) = 90°$, ceea ce arată că triunghiul ABE este dreptunghic. Deoarece $m(\widehat{DAB}) = 30°$ (fiindcă $[AB] \equiv [AC]$ și $[DB] \equiv [DC]$ implică $\widehat{DAB} \equiv \widehat{DAC}$) și $\widehat{EAB} \equiv \widehat{DAB}$ (căci E este simetricul lui D față de AB), rezultă că $m(\widehat{EAD}) = 60°$. Ținând seama și de faptul că $[AE] \equiv [AD]$, conchidem că triunghiul ADE este echilateral.

7. **Fie triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), M mijlocul lui $[AB]$, N mijlocul lui $[AC]$, E simetricul lui B față de N și F simetricul lui C față de M. Arătați că $[EM] \equiv [FN]$.**

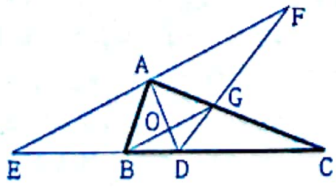
Soluție



Fie $\{G\} = BN \cap CM$. Deoarece $[BN]$ și $[CM]$ sunt mediane în triunghiul ABC, rezultă că G este centrul de greutate al triunghiului, de unde $GM = \frac{CM}{3}$ și $GN = \frac{BN}{3}$. Remarcăm și faptul că $[MF] \equiv [MC]$, iar $[NE] \equiv [NB]$. Cum $GF = GM + MF$ (căci $M \in (FG)$), rezultă că $FG = \frac{4CM}{3}$. Analog, $EG = \frac{4BN}{3}$. Având în vedere și faptul că $[CM] \equiv [BN]$ (fiind medianele corespunzătoare laturilor congruente într-un triunghi isoscel), deducem că $[GM] \equiv [GN]$ și $[GF] \equiv [GE]$. Prin urmare, $\triangle FGN \equiv \triangle EGM$ (L.U.L.), de unde $[FN] \equiv [EM]$.

8. **Se consideră triunghiul ABC în care $AB < AC$. Fie D intersecția bisectoarei unghiului BAC cu latura BC, E intersecția perpendicularei în A pe AD cu dreapta BC, F simetricul lui E față de A și $\{G\} = DF \cap AC$. Arătați că:**
a) $\triangle AEB \equiv \triangle AFG$; b) G este simetricul lui B față de AD.

Soluție



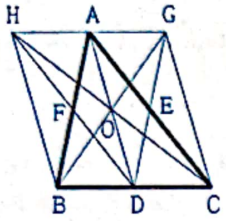
a) Întrucât $[AE] \equiv [AF]$ și $DA \perp EF$, rezultă că $[DE] \equiv [DF]$, de unde $\widehat{DEF} \equiv \widehat{DFE}$, ceea ce este totuna cu $\widehat{BEA} \equiv \widehat{GFA}$. Remarcând faptul că $m(\widehat{BAE}) = 90° - m(\widehat{BAD})$, $m(\widehat{GAF}) = 90° - m(\widehat{GAD})$, iar $\widehat{BAD} \equiv \widehat{GAD}$, deducem că $\widehat{BAE} \equiv \widehat{GAF}$. Totodată, $[AE] \equiv [AF]$, deci $\triangle AEB \equiv \triangle AFG$ (U.L.U.).

b) Fie $\{O\} = AD \cap BG$. Deoarece $[AB] \equiv [AG]$ (căci $\triangle AEB \equiv \triangle AFG$), iar $\widehat{BAO} \equiv \widehat{GAO}$, rezultă că $[OB] \equiv [OG]$ și $AO \perp BG$. Drept urmare, $BG \perp AD$ și $[BO] \equiv [OG]$, ceea ce arată că G este simetricul lui B față de AD.

Scanned with OKEN Scanner

9. **Fie triunghiul ABC, D mijlocul lui $[BC]$, E mijlocul lui $[CA]$, F mijlocul lui $[AB]$, G simetricul lui D față de E și H simetricul lui D față de F. Arătați că:**
a) punctele H, A și G sunt coliniare; b) dreptele AD, BG și CH sunt concurente.

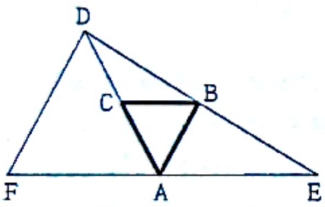
Soluție



a) Întrucât $[EA] \equiv [EC]$ și $[ED] \equiv [EG]$, rezultă că patrulaterul $ADCG$ este paralelogram, de unde $AG \parallel DC$. Analog, $AH \parallel BD$. Drept urmare, $AG \parallel BC$ și $AH \parallel BC$, ceea ce arată că punctele H, A și G sunt coliniare.
b) Din faptul că $AG \parallel BD$ și $[AG] \equiv [BD]$ deducem că patrulaterul $ABDG$ este paralelogram. Fie $\{O\} = AD \cap BG$. Rezultă că $[OA] \equiv [OD]$. Pe de altă parte, patrulaterul $ACDH$ este paralelogram (fiindcă $AH \parallel CD$ și $[AH] \equiv [DC]$). Cum O este centrul acestui paralelogram (căci $[OA] \equiv [OD]$), iar $[CH]$ este diagonală în paralelogram, rezultă că $O \in CH$. Ținând seama și de faptul că $\{O\} = AD \cap BG$, conchidem că dreptele AD, BG și CH sunt concurente.

10. **Fie triunghiul echilateral ABC, D simetricul lui A față de C, E simetricul lui D față de B și F simetricul lui E față de A. Arătați că:**
a) $m(\widehat{FDE}) = 90°$; b) $EF = 4AB$.

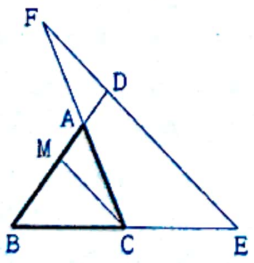
Soluție



a) Deoarece $[CD] \equiv [CA]$ (căci D este simetricul lui A față de C) și $[CA] \equiv [CB]$, rezultă că $[CB] \equiv [CD]$, de unde $CB = \frac{AD}{2}$. Drept urmare, $m(\widehat{ABD}) = 90°$. Totodată, $[BE] \equiv [BD]$ (fiindcă E este simetricul lui D față de B) și $[AE] \equiv [AF]$ (căci F este simetricul lui E față de A), deci $[AB]$ este linie mijlocie în triunghiul EDF, de unde $AB \parallel FD$, ceea ce implică $\widehat{FDE} \equiv \widehat{ABE}$. Ținând seama și de faptul că $m(\widehat{ABE}) = 90°$, deducem că $m(\widehat{FDE}) = 90°$.
b) Cum $[CB]$ este linie mijlocie în triunghiul DAE, rezultă că $AE = 2CB$ și, cum $EF = 2AE$, conchidem că $EF = 4CB$, de unde $EF = 4AB$.

11. **Se consideră triunghiul ABC și punctul $M \in (AB)$ astfel încât $BM = 2AM$. Fie D simetricul lui M față de A, E simetricul lui B față de C și F simetricul lui C față de A. Arătați că:**
a) punctele D, E și F sunt coliniare; b) $DE = 2DF$.

Soluție



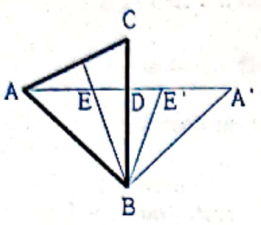
a) Întrucât $[AM] \equiv [AD]$, $[AC] \equiv [AF]$ și $\widehat{MAC} \equiv \widehat{DAF}$, rezultă că $\Delta ACM \equiv \Delta AFD$, de unde $\widehat{ACM} \equiv \widehat{AFD}$, ceea ce implică $CM \parallel FD$. Remarcând faptul că $MB = 2MA$ și $MD = 2MA$ (căci $[AM] \equiv [AD]$), deducem că $[MB] \equiv [MD]$. Totodată, $[CB] \equiv [CE]$, deci $[CM]$ este linie mijlocie în triunghiul BDE, de unde $CM \parallel DE$, ceea ce, împreună cu $CM \parallel FD$, arată că punctele D, E și F sunt coliniare.
b) Din cele stabilite anterior deducem că $[CM] \equiv [DF]$ și că $2CM = DE$. Prin urmare, $DE = 2DF$.

12. **Se consideră triunghiul ABC în care $m(\hat{B}) = 60°$. Fie $AD \perp BC$ ($D \in BC$) și E intersecția**

Scanned with OKEN Scanner

bisectoarei unghiului ABC cu dreapta AD. Arătați că $2AD = 3BE$.

Soluție

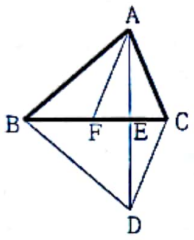


Fie A', E' simetricele față de D ale punctelor A, respectiv E. Deoarece $\widehat{BAE} \equiv \widehat{ABE}$ (căci $m(\widehat{BAE}) = 90° - m(\widehat{ABD}) = 30°$ și $m(\widehat{ABE}) = \frac{m(\widehat{ABC})}{2} = 30°$), rezultă că $[BE] \equiv [AE]$. Remarcând faptul că $[BE] \equiv [BE']$ și $m(\widehat{EBE'}) = 2m(\widehat{EBD}) = 60°$ (fiindcă E' este simetricul lui E față de D), deducem că triunghiul BEE' este echilateral, deci $[EE'] \equiv [BE]$. Întrucât $E'A' = DA' - DE'$, $EA = DA - DE$, iar $DA' = DA$ și $DE' = DE$, rezultă că $E'A' = EA$. Cum $2AD = AA' = AE + EE' + E'A$, rezultă că $2AD = 2AE + BE$ și, cum $AE = BE$, conchidem că $2AD = 3BE$.

13. Se consideră triunghiul ABC în care $m(\hat{B}) < 90°$ și $m(\hat{C}) < 90°$. Fie D simetricul lui A față de BC. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC, știind că triunghiul ABD este echilateral și că $\mathcal{A}[ABD] = 3\mathcal{A}[ACD]$.

O.M., etapa județeană, Vâlcea, 2001

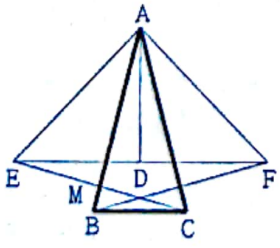
Soluție



Fie $\{E\} = AD \cap BC$ și F simetricul lui C față de E. Întrucât D este simetricul lui A față de BC, rezultă că $AD \perp BC$, $[AE] \equiv [DE]$ și $\widehat{ABE} \equiv \widehat{DBE}$. Remarcând faptul că $m(\widehat{ABD}) = 60°$, deducem că $m(\widehat{ABC}) = 30°$. Deoarece $\mathcal{A}[ABD] = \frac{AD \cdot BE}{2}$, $\mathcal{A}[ACD] = \frac{AD \cdot CE}{2}$ și $\mathcal{A}[ABD] = 3\mathcal{A}[ACD]$, rezultă că $BE = 3CE$, ceea ce, împreună cu $FE = CE$, conduce la $BE = 3FE$. Cum $F \in (BE)$, iar $[BE]$ este mediană în triunghiul ABD, deducem că F este centrul de greutate al triunghiului ABD, deducem că F este centrul de greutate al triunghiului ABD. Rezultă că $[AF$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BAD}$ (căci triunghiul ABD este echilateral), deci $m(\widehat{BAF}) = 30°$, de unde $\widehat{FBA} \equiv \widehat{BAF}$, ceea ce implică $[AF] \equiv [BF]$. Cum F este mijlocul lui $[BC]$, rezultă că $m(\widehat{BAC}) = 90°$. Drept urmare, $m(\widehat{ACB}) = 60°$.

14. Se consideră triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) în care $5m(\hat{A}) = 2m(\hat{B})$. Fie E simetricul lui C față de AB, F simetricul lui B față de AC și D mijlocul lui $[EF]$. Arătați că: a) triunghiul AEF este dreptunghic isoscel; b) $AD \perp BC$.

Soluție



a) Deoarece $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180°$, $\hat{B} \equiv \hat{C}$ și $5m(\hat{A}) = 2m(\hat{B})$, rezultă că $m(\hat{A}) = 30°$ și $m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = 75°$. Remarcând faptul că E este simetricul lui C față de AB, deducem că $[AE] \equiv [AC]$ și $\widehat{EAB} \equiv \widehat{CAB}$. Analog, $[AF] \equiv [AB]$ și $\widehat{FAC} \equiv \widehat{BAC}$. Întrucât $[AC] \equiv [AB]$, rezultă că $[AE] \equiv [AF]$. Totodată, $m(\widehat{EAF}) = m(\widehat{EAB}) + m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{FAC}) = 3m(\widehat{BAC})$, deci $m(\widehat{EAF}) = 90°$. Prin urmare, triunghiul AEF este dreptunghic isoscel.

b) Din faptul că triunghiul AEF este dreptunghic isoscel deducem că $m(\widehat{AEF}) = 45°$. Cum $[AE] \equiv [AC]$ și $m(\widehat{BAC}) = 60°$, rezultă că triunghiul AEC este echilateral, deci $m(\widehat{AEC}) = 60°$, de unde $m(\widehat{FEC}) = 15°$. Pe de altă

Scanned with OKEN Scanner

parte, $m(\widehat{ECB}) = m(\widehat{MCB}) = 90° - m(\widehat{MBC}) = 15°$ ($\{M\} = AB \cap CE$). Rezultă că $\widehat{FEC} \equiv \widehat{ECB}$, ceea ce implică $EF \parallel BC$. Ţinând seama şi de faptul că $AD \perp EF$ (căci $[AE] \equiv [AF]$ şi $[DE] \equiv [DF]$), conchidem că $AD \perp BC$.

PROBLEME PROPUSE

1. Fie triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$). Arătaţi că punctele B şi C sunt simetrice faţă de bisectoarea unghiului BAC.

2. Fie triunghiul ABC, E simetricul lui B faţă de A şi F simetricul lui C faţă de A. Arătaţi că $EF \parallel BC$.

3. Fie triunghiul ABC, M mijlocul lui $[AB]$, N mijlocul lui $[AC]$, E simetricul lui B faţă de N şi F simetricul lui C faţă de M. Arătaţi că punctele E, A, F sunt coliniare şi că $EF = 2BC$.

4. Se consideră triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) în care $m(\hat{A}) = 120°$. Fie D simetricul lui B faţă de AC. Arătaţi că triunghiul BCD este echilateral.

5. Fie D un punct pe ipotenuza BC a triunghiului dreptunghic ABC ($D \neq B$ şi $D \neq C$), E simetricul lui D faţă de AB şi F simetricul lui D faţă de AC. Arătaţi că punctele E, A şi F sunt coliniare.

6. Arătaţi că punctul de intersecţie a diagonalelor unui dreptunghi este centrul de simetrie al dreptunghiului.

7. Arătaţi că mediatoarele laturilor unui dreptunghi sunt axe de simetrie ale dreptunghiului.

8. Se consideră triunghiurile isoscele ABC ($[AB] \equiv [AC]$) şi DBC ($[DB] \equiv [DC]$) neavând puncte interioare comune. Arătaţi că, dacă $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DBC}$, atunci punctele B şi C sunt simetrice faţă de AD, iar punctele A şi D sunt simetrice faţă de BC.

9. Fie triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), E simetricul lui B faţă de AC, F simetricul lui C faţă de AB şi $\{D\} = BE \cap CF$. Arătaţi că punctele E şi F sunt simetrice faţă de AD.

10. Fie triunghiul ABC, D intersecţia bisectoarei unghiului BAC cu latura BC, E simetricul lui D faţă de AB şi F simetricul lui D faţă de AC. Arătaţi că $AD \perp EF$.

11. Fie triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90°$), $AD \perp BC$ ($D \in BC$), E intersecţia bisectoarei unghiului CAD cu dreapta CD şi F simetricul lui D faţă de AE. Arătaţi că $EF \parallel AB$.

12. Fie O centrul pătratului $ABCD$, E simetricul lui O faţă de A, F simetricul lui O faţă de B, G simetricul lui O faţă de C şi H simetricul lui O faţă de D. Arătaţi că patrulaterul $EFGH$ este pătrat.

13. Fie triunghiul ABC, D intersecţia bisectoarei unghiului BAC cu latura BC, E intersecţia paralelei prin B la AD cu dreapta AC şi F intersecţia perpendicularei în A pe AD cu BE. Arătaţi că E este simetricul lui B faţă de AF.

14. Se consideră triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) şi punctele M, $N \in (BC)$ astfel încât $[BM] \equiv [CN]$. Fie E simetricul lui A faţă de M, F simetricul lui A faţă de N şi $\{D\} = BF \cap CE$. Arătaţi că E şi F sunt simetrice faţă de AD.

Scanned with OKEN Scanner

§4. TRAPEZUL

PROBLEME REZOLVATE

1. **Aflați măsura fiecăruia dintre unghiurile trapezului** $ABCD$ $(AB \parallel CD)$, **știind că** $m(\hat{A})$ **și** $m(\hat{B})$ **sunt invers proporționale cu** $0,1(6)$ **și** $0,08(3)$, **iar** $m(\hat{C}) + m(\hat{D}) = 252°$.

Soluție

Deoarece $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D}) = 360°$ și $m(\hat{C}) + m(\hat{D}) = 252°$, rezultă că $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = 108°$. Remarcând că $0,1(6) = \frac{1}{6}$ și $0,08(3) = \frac{1}{12}$, deducem că $\frac{1}{6}m(\hat{A}) = \frac{1}{12}m(\hat{B})$, de unde $2m(\hat{A}) = m(\hat{B})$. Drept urmare, $m(\hat{A}) = 36°$ și $m(\hat{B}) = 72°$. Ținând seama și de faptul că $m(\hat{C}) + m(\hat{B}) = 180°$, iar $m(\hat{D}) + m(\hat{A}) = 180°$ (căci $AB \parallel CD$), conchidem că $m(\hat{C}) = 108°$ și $m(\hat{D}) = 144°$.

2. **Se consideră trapezul** $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ **în care** $m(\hat{A}) = 2m(\hat{B})$ **și** $m(\hat{D}) = 2m(\hat{A})$. **Arătați că** $AB - CD = 2AD$.

Soluție

Întrucât $m(\hat{A}) + m(\hat{D}) = 180°$ (căci $AB \parallel DC$) și $m(\hat{D}) = 2m(\hat{A})$, rezultă că $m(\hat{A}) = 60°$, ceea ce implică $m(\hat{B}) = 30°$ (fiindcă $m(\hat{A}) = 2m(\hat{B})$). Fie E intersecția paralelei prin C la DA cu latura AB. Rezultă că $\widehat{CEB} \equiv \widehat{DAB}$, de unde $m(\widehat{CEB}) = 60°$. Deducem că $m(\widehat{BCE}) = 90°$. Cum $m(\widehat{CBE}) = 30°$, rezultă că $BE = 2CE$. Ținând seama și de faptul că $BE = AB - AE$, iar $CE = AD$ și $AE = CD$ (căci patrulaterul $ABCD$ este paralelogram), conchidem că $2AD = AB - CD$.

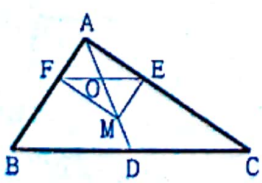
3. **Se consideră trapezul dreptunghic** $ABCD$ $(AB \parallel CD$ **și** $DA \perp AB)$ **în care** $AB + BC = 18$ cm, $CD = 6$ cm **și** $m(\hat{C}) = 120°$. **Aflați lungimea bazei** AB.

Soluție

Fie $CE \perp AB$ $(E \in AB)$. Deoarece patrulaterul $AECD$ este dreptunghi, rezultă că $[AE] \equiv [DC]$ și $m(\widehat{ECD}) = 90°$. Drept urmare, $AE = 6$ cm, iar $m(\widehat{ECB}) = 30°$. Remarcând faptul că $m(\widehat{CEB}) = 90°$, deducem că $BC = 2EB$. Cum $AB + BC = 18$ cm, rezultă că $6 + EB + 2EB = 18$, ceea ce conduce la $EB = 4$ cm. În consecință, $AB = 10$ cm.

4. **Fie triunghiul dreptunghic** ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$, D **mijlocul lui** $[BC]$, M **un punct oarecare pe** (AD), $ME \perp AC$ **și** $MF \perp AB$ $(E \in AC, F \in AB)$. **Arătați că patrulaterul** $BCEF$ **este trapez.**

Soluție



Fie $\{O\} = AM \cap EF$. Întrucât patrulaterul $MEAF$ este dreptunghi, rezultă că $[OF] \equiv [OA]$, de unde $\widehat{OFA} \equiv \widehat{OAF}$, ceea ce este totuna cu $\widehat{EFA} \equiv \widehat{DAB}$. Remarcând faptul că $[DA] \equiv [DB]$ (căci $m(\widehat{BAC}) = 90°$ și $[DB] \equiv [DC]$ implică $AD = \frac{BC}{2}$), deducem că $\widehat{DAB} \equiv \widehat{DBA}$. Drept urmare, $\widehat{EFA} \equiv \widehat{DBA}$, ceea ce conduce la $FE \parallel BC$. Cum $BF \nparallel CE$, patrulaterul $BCEF$ este trapez.

Scanned with OKEN Scanner

5. **Fie trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$) în care $[CA] \equiv [CB]$, $[DC] \equiv [DA]$ şi $BC + CD = AB$. Determinaţi măsurile unghiurilor trapezului.**

Soluţie

Fie E intersecţia paralelei prin C la AD cu latura AB. Deoarece $AE \parallel DC$, $AD \parallel EC$ şi $[AD] \equiv [DC]$, rezultă că patrulaterul $ADCE$ este romb, ceea ce implică $[AE] \equiv [DC]$ şi $\widehat{EAC} \equiv \widehat{DAC}$. Ţinând seama şi de faptul că $\widehat{EAC} \equiv \widehat{CBE}$ (căci $[CA] \equiv [CB]$), deducem că $m(\widehat{CBE}) = \frac{m(\widehat{BAD})}{2}$. Întrucât $AB = BC + CD$ şi $AB = AE + EB$, iar $[CD] \equiv [AE]$, rezultă că $[BC] \equiv [BE]$, de unde $\widehat{BCE} \equiv \widehat{BEC}$, ceea ce conduce la $\widehat{BCE} \equiv \widehat{BAD}$ (fiindcă $CE \parallel DA$ implică $\widehat{BEC} \equiv \widehat{BAD}$). Având în vedere şi faptul că $m(\widehat{BEC}) + m(\widehat{BCE}) + m(\widehat{CBE}) = 180°$, deducem că $m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{BAD}) + \frac{m(\widehat{BAD})}{2} = 180°$, de unde $m(\widehat{BAD}) = 72°$. Prin urmare, $m(\widehat{ADC}) = 108°$ (căci $m(\widehat{ADC}) = 180° - m(\widehat{BAD})$), $m(\widehat{ABC}) = 36°$ şi $m(\widehat{BCD}) = 144°$.

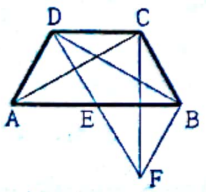
6. **Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ ($AB \parallel CD$) în care $m(\hat{A}) = 60°$, $BC = 8$ cm şi $CD = 6$ cm. Aflaţi lungimea laturii AB.**

Soluţie

Întrucât trapezul $ABCD$ este isoscel, iar $AB \parallel CD$, rezultă că $\widehat{CBA} \equiv \widehat{DAB}$, de unde $m(\widehat{CBA}) = 60°$. Fie E intersecţia paralelei prin C la AD cu latura AB. Remarcând faptul că patrulaterul $AECD$ este paralelogram, deducem că $[AE] \equiv [DC]$, deci $AE = 6$ cm. Totodată, $\widehat{CEB} \equiv \widehat{DAB}$, ceea ce conduce la $m(\widehat{CEB}) = 60°$. Cum şi $m(\widehat{CBE}) = 60°$, rezultă că triunghiul BCE este echilateral, de unde $EB = BC = 8$ cm. Ţinând seama şi de faptul că $AB = AE + EB$ (căci $E \in (AB)$), conchidem că $AB = 14$ cm.

7. **Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ în care baza mare este $[AB]$ şi fie E intersecţia dreptei AB cu paralela prin D la BC. Fie punctul $F \in (DE)$, astfel încât $E \in (DF)$ şi $[BF] \equiv [BE]$. Arătaţi că $[AC] \equiv [CF]$.**

Soluţie



Deoarece patrulaterul $ABCD$ este trapez isoscel (în care $AB \parallel CD$), rezultă că $[AC] \equiv [BD]$. Din faptul că patrulaterul $BCDE$ este paralelogram (căci $DE \parallel CB$ şi $DC \parallel EB$), deducem că $[CD] \equiv [BE]$, de unde $[CD] \equiv [BF]$ (fiindcă $[BE] \equiv [BF]$). Ţinând seama şi de faptul că $CB \parallel DF$, conchidem că patrulaterul $BCDF$ este trapez isoscel, deci $[CF] \equiv [BD]$, ceea ce, împreună cu $[BD] \equiv [AC]$, arată că $[CF] \equiv [AC]$.

8. **Arătaţi că, dacă într-un trapez segmentul determinat de mijloacele bazelor este perpendicular pe baze, atunci trapezul este isoscel.**

Soluţie

Fie $ABCD$ ($AB \parallel CD$) trapezul considerat, E mijlocul lui $[AB]$ şi F mijlocul lui $[CD]$. Întrucât $[EA] \equiv [EB]$ şi $FE \perp AB$, rezultă că $[FA] \equiv [FB]$ şi $\widehat{AFE} \equiv \widehat{BFE}$. Remarcând şi faptul că $m(\widehat{AFD}) = 90° - m(\widehat{AFE})$, $m(\widehat{BFC}) = 90° - m(\widehat{BFE})$, deducem că $\widehat{AFD} \equiv \widehat{BFC}$, ceea ce, împreună cu $[FA] \equiv [FB]$ şi $[FD] \equiv [FC]$, conduce la $\triangle ADF \equiv \triangle BCF$ (L.U.L.), de unde $[AD] \equiv [BC]$. Deci, trapezul $ABCD$ este isoscel.

Scanned with OKEN Scanner

9. **Fie trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$ și $AB > CD$). Arătați că, dacă $AC \perp CB$ și $BD \perp DA$, atunci $[AC] \equiv [BD]$.**

Soluție

Fie E mijlocul lui $[AB]$. Deoarece $m(\widehat{ADB}) = 90°$ și $[EA] \equiv [EB]$, rezultă că $DE = \frac{AB}{2}$. Analog, $CE = \frac{AB}{2}$. Prin urmare, $[EC] \equiv [ED]$, de unde $\widehat{ECD} \equiv \widehat{EDC}$. Remarcând și faptul că $\widehat{AED} \equiv \widehat{EDC}$, iar $\widehat{BEC} \equiv \widehat{ECD}$, deducem că $\widehat{AED} \equiv \widehat{BEC}$. Totodată, $[EA] \equiv [EB]$ și $[ED] \equiv [EC]$, deci $\Delta AED \equiv \Delta BEC$ (L.U.L.), ceea ce implică $[AD] \equiv [BC]$. Cum patrulaterul $ABCD$ este trapez, conchidem că $[AC] \equiv [BD]$.

10. **Arătați că patrulaterul convex cu două laturi opuse congruente și diagonalele congruente este trapez isoscel sau dreptunghi.**

Soluție

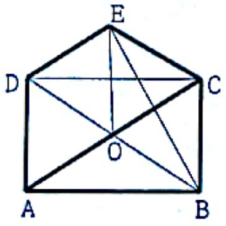
Fie $ABCD$ patrulaterul considerat în enunț. Pentru fixare, să presupunem că $[BC] \equiv [AD]$. Întrucât $[AB] \equiv [BA]$, $[BC] \equiv [AD]$ și $[AC] \equiv [BD]$, rezultă că $\Delta ABC \equiv \Delta BAD$ (L.L.L.), de unde $\widehat{ABC} \equiv \widehat{BAD}$. Pe de altă parte, $[CD] \equiv [DC]$, $[BC] \equiv [AD]$ și $[BD] \equiv [AC]$, deci $\Delta BCD \equiv \Delta ADC$ (L.L.L.), ceea ce implică $\widehat{BCD} \equiv \widehat{ADC}$. Remarcând și faptul că suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este $360°$, deducem că

$$360° = m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BCD}) + m(\widehat{CDA}) = 2m(\widehat{ABC}) + 2m(\widehat{BCD}) = 2\left[m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BCD})\right],$$

de unde $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BCD}) = 180°$, ceea ce arată că $AB \parallel CD$. Totodată, $[AD] \equiv [BC]$, deci patrulaterul $ABCD$ este trapez isoscel sau dreptunghi.

11. **Se consideră dreptunghiul $ABCD$ și trapezul isoscel $ACED$ ($AC \parallel DE$, $AC > DE$ și $[AD] \equiv [CE]$). Arătați că $DE \perp EB$.**

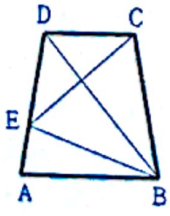
Soluție



Deoarece $[AD] \equiv [BC]$ (căci patrulaterul $ABCD$ este dreptunghi), iar $[AD] \equiv [CE]$, rezultă că $[BC] \equiv [CE]$, deci triunghiul BCE este isoscel de vârf C. Din faptul că $\widehat{BCA} \equiv \widehat{DAC}$ (fiindcă $CB \parallel DA$) și $\widehat{DAC} \equiv \widehat{ECA}$ (căci patrulaterul $ACED$ este trapez isoscel), deducem că $\widehat{BCA} \equiv \widehat{ECA}$, ceea ce arată că $[CA$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BCE}$ (în triunghiul BCE). Drept urmare, CA este și înălțime, adică $CA \perp EB$. Având în vedere că $CA \parallel DE$, conchidem că $DE \perp EB$.

12. **Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ ($AB \parallel CD$) în care $m(\hat{A}) = 80°$ și $AD > CD$. Fie punctul $E \in (AD)$ astfel încât $[DE] \equiv [DC]$. Arătați că, dacă $[CE] \equiv [CB]$, atunci $m(\widehat{ABD}) = 50°$.**

Soluție



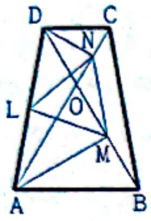
Întrucât $\widehat{DCE} \equiv \widehat{DEC}$ (căci $[DE] \equiv [DC]$), iar $m(\widehat{EDC}) = 180° - m(\widehat{DAB}) = 100°$, rezultă că $m(\widehat{DCE}) = 40°$. Ținând seama și de faptul că $m(\widehat{BCD}) = 100°$ (fiindcă trapezul $ABCD$ este isoscel), iar $m(\widehat{BCE}) = m(\widehat{BCD}) - m(\widehat{DCE})$, deducem că $m(\widehat{BCE}) = 60°$, ceea ce, împreună cu $[CE] \equiv [CB]$, arată că triunghiul BCE este echilateral, de unde $[BC] \equiv [BE]$. Totodată, $[DC] \equiv [DE]$, deci BD este mediatoarea segmentului CE. Rezultă că $[BD$ este bisectoarea unghiului CBE.

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, $m(\widehat{CBD}) = 60° : 2 = 30°$. Remarcând și faptul că $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ABC}) - m(\widehat{CBD})$, iar $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{BAD}) = 80°$, conchidem că $m(\widehat{ABD}) = 50°$.

13. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Fie $\{O\} = AC \cap BD$, L mijlocul lui $[AD]$, M mijlocul lui $[OB]$ și N mijlocul lui $[OC]$. Arătați că, dacă $m(\widehat{AOB}) = 60°$, atunci triunghiul LMN este echilateral.

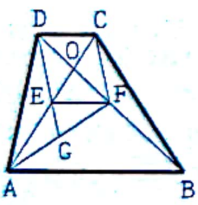
Soluție



Deoarece $MN = \frac{BC}{2}$ (căci $[MN]$ este linie mijlocie în triunghiul OBC) și $BC = AD$ (fiindcă patrulaterul $ABCD$ este trapez isoscel, iar $AB \parallel CD$), rezultă că $MN = \frac{AD}{2}$. Întrucât $[OA] \equiv [OB]$ (căci într-un trapez isoscel diagonalele formează cu bazele triunghiuri isoscele) și $m(\widehat{AOB}) = 60°$ (din enunț), rezultă că triunghiul OAB este echilateral. Remarcând și faptul că $[MO] \equiv [MB]$, deducem că $AM \perp OB$, deci $m(\widehat{AMD}) = 90°$, ceea ce, împreună cu $[LA] \equiv [LD]$, arată că $LM = \frac{AD}{2}$. Analog, demonstrăm că $NL = \frac{AB}{2}$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $[MN] \equiv [LM] \equiv [LN]$. Deci, triunghiul LMN este echilateral.

14. Se consideră trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$) în care $AB = 3CD$. Fie E mijlocul lui $[AC]$, F mijlocul lui $[BD]$ și G mijlocul lui $[AF]$. Arătați că:
a) punctele D, E și G sunt coliniare; b) $3FC = 2DG$.

Soluție



a) Întrucât $ABCD$ este trapez, iar $[EA] \equiv [EC]$ și $[FB] \equiv [FD]$, rezultă că $EF \parallel CD$ și $EF = \frac{AB - CD}{2}$. Cum $AB = 3CD$, rezultă că $[EF] \equiv [CD]$. Drept urmare, patrulaterul $CDEF$ este paralelogram, ceea ce implică $DE \parallel CF$ și $[DE] \equiv [CF]$. Remarcând faptul că $[EG]$ este linie mijlocie în triunghiul ACF, deducem că $EG \parallel CF$ și $EG = \frac{CF}{2}$. Deoarece $ED \parallel CF$ și $EG \parallel CF$, rezultă că punctele D, E și G sunt coliniare.

b) Evident, $DG = DE + EG$, de unde $DG = CF + \frac{CF}{2}$, ceea ce conduce la $3FC = 2DG$.

15. Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$ ($AB \parallel CD$ și $DA \perp AB$) în care $[CA] \equiv [CB]$, $m(\hat{C}) = 120°$ și $CD = 4$ cm. Aflați lungimea liniei mijlocii a trapezului.

Soluție

Deoarece $\widehat{CAB} \equiv \widehat{CBA}$ (căci $[CA] \equiv [CB]$), rezultă că $m(\widehat{ACB}) = 180° - 2m(\widehat{CAB})$, ceea ce, împreună cu $\widehat{CAB} \equiv \widehat{ACD}$ (fiindcă $AB \parallel CD$), conduce la $m(\widehat{ACB}) = 180° - 2m(\widehat{ACD})$. Ținând seama și de faptul că $m(\widehat{ACD}) + m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DCB}) = 120°$, deducem că $180° - 2m(\widehat{ACD}) + m(\widehat{ACD}) = 120°$, de unde $m(\widehat{ACD}) = 60°$, ceea ce implică $m(\widehat{DAC}) = 30°$. Drept urmare, $AC = 2CD = 8$ cm. Cum $[CA] \equiv [CB]$ și $m(\widehat{ACB}) = 60°$, rezultă că triunghiul ABC este echilateral, deci $AB = CA = 8$ cm. Deducem imediat că lungimea liniei mijlocii a trapezului este de 6 cm.

Scanned with OKEN Scanner

16. **Se consideră patrulaterul convex $ABCD$. Fie E mijlocul lui $[AD]$ și F mijlocul lui $[BC]$. Arătați că $EF = \frac{AB+CD}{2}$ dacă și numai dacă $AB \parallel CD$.**

Soluție

Să demonstrăm implicația : dacă $AB \parallel CD$, atunci $EF = \frac{AB+CD}{2}$.

Întrucât $AB \parallel CD$, rezultă că patrulaterul $ABCD$ este trapez sau paralelogram.

Dacă $ABCD$ este trapez, atunci $EF = \frac{AB+CD}{2}$ (căci $[EF]$ este linie mijlocie în trapez).

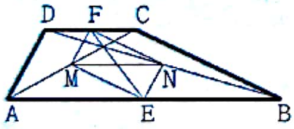
Dacă $ABCD$ este paralelogram, atunci $EF = AB = CD$ (fiindcă patrulaterele $ABFE$ și $CDEF$ sunt paralelograme), de unde $EF = \frac{AB+CD}{2}$.

Să demonstrăm implicația : dacă $EF = \frac{AB+CD}{2}$, atunci $AB \parallel CD$.

Fie M mijlocul lui $[AC]$. Deoarece $[EM]$ este linie mijlocie în triunghiul ACD, rezultă că $EM \parallel CD$ și $EM = \frac{CD}{2}$. Remarcând faptul că $[MF]$ este linie mijlocie în triunghiul ABC, deducem că $MF \parallel AB$ și $MF = \frac{AB}{2}$. Prin urmare, $EM + MF = \frac{AB+CD}{2}$, ceea ce, împreună cu $EF = \frac{AB+CD}{2}$, conduce la $EM + MF = EF$, egalitate ce are loc dacă și numai dacă $M \in (EF)$. Cum $CD \parallel EM$ și $M \in EF$, rezultă că $CD \parallel EF$. Analog, $AB \parallel EF$ și, deci, $AB \parallel CD$.

17. **Se consideră trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ în care $m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{CBA}) = 90°$. Fie E mijlocul lui $[AB]$ și F mijlocul lui $[CD]$. Arătați că $EF = \frac{AB-CD}{2}$.**

Soluție



Soluția I

Fie M mijlocul lui $[AC]$ și N mijlocul lui $[BD]$. Deoarece $ME \parallel BC$ și $ME = \frac{BC}{2}$ (căci $[ME]$ este linie mijlocie în triunghiul ABC), iar $NF \parallel BC$ și $NF = \frac{BC}{2}$ (fiindcă $[NF]$ este linie mijlocie în triunghiul BCD), rezultă că $ME \parallel NF$ și $[ME] \equiv [NF]$, ceea ce arată că patrulaterul $EMFN$ este paralelogram. Întrucât $\widehat{NEB} \equiv \widehat{DAB}$ (căci $NE \parallel AD$), $\widehat{MEA} \equiv \widehat{CBA}$ (fiindcă $ME \parallel CB$) și $m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{CBA}) = 90°$, rezultă că $m(\widehat{NEB}) + m(\widehat{MEA}) = 90°$, de unde $m(\widehat{MEN}) = 90°$. Drept urmare, patrulaterul $EMFN$ este dreptunghi și, deci, $[EF] \equiv [MN]$. Având în vedere că patrulaterul $ABCD$ este trapez, iar $[MA] \equiv [MC]$ și $[NB] \equiv [ND]$, rezultă că $MN = \frac{1}{2}(AB - CD)$ (condiția $m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{CBA}) = 90° < 180°$ impune $AB > CD$). Ca urmare a celor stabilite anterior, conchidem că $EF = \frac{AB-CD}{2}$.

Soluția a II-a

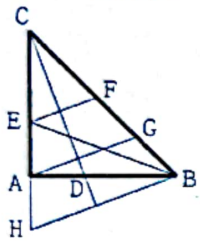
Fie K, L intersecțiile dreptei AB cu paralelele duse prin F la DA, respectiv CB. Deoarece $\widehat{FKL} \equiv \widehat{DAB}$ (căci $FK \parallel DA$), $\widehat{FLK} \equiv \widehat{CBA}$ (fiindcă $FL \parallel CB$) și $m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{CBA}) = 90°$, rezultă că $m(\widehat{FKL}) + m(\widehat{FLK}) = 90°$, de unde $m(\widehat{KFL}) = 90°$.

Scanned with OKEN Scanner

Întrucât patrulaterele $ADFK$ și $BCFL$ sunt paralelograme (căci $AD \parallel KF$, $AK \parallel DF$ și $BC \parallel LF$, $BL \parallel CF$), rezultă că $AK = DF$ și $BL = CF$, ceea ce, împreună cu $DF = CF$, conduce la $KE = LE$. Ținând seama și de faptul că $m(\widehat{KFL}) = 90°$, deducem că $EF = \frac{LK}{2}$. Remarcând și faptul că $LK = AB - (AK + BL) =$ $= AB - (DF + FC) = AB - CD$, conchidem că $EF = \frac{AB - CD}{2}$.

18. Se consideră triunghiul dreptunghic isoscel ABC $(m(\widehat{A}) = 90°)$ și punctele $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ astfel încât $[AD] \equiv [AE]$. Fie F și G intersecțiile dreptei BC cu perpendicularele din E, respectiv A pe CD. Arătați că $2AG = EF + EB$.

Soluție



Egalitatea pe care trebuie să o demonstrăm ne sugerează să arătăm că $[AG]$ este linie mijlocie într-un trapez în care una din baze este $[EF]$, iar cealaltă este un segment congruent cu $[EB]$. Fie H intersecția perpendicularei din B pe CD cu dreapta AC. Cum $EF \perp CD$, $AG \perp CD$ și $HB \perp CD$, rezultă că $EF \parallel AG \parallel HB$. Din faptul că $\Delta ABE \equiv \Delta ACD$ (C.C.), deducem că $\widehat{ABE} \equiv \widehat{ACD}$. Totodată, $\widehat{ACD} \equiv \widehat{ABH}$ (căci $CA \perp BA$ și $CD \perp BH$), deci $\widehat{ABE} \equiv \widehat{ABH}$, ceea ce, împreună cu $BA \perp EH$, arată că $[BE] \equiv [BH]$ și $[AE] \equiv [AH]$. Din cele stabilite anterior deducem că patrulaterul $EFBH$ este trapez și că $[AG]$ este linie mijlocie în trapez, de unde $2AG = EF + BH$ și, deci, $2AG = EF + EB$.

PROBLEME PROPUSE

1. Aflați măsura fiecăruia dintre unghiurile trapezului $ABCD$ $(AB \parallel CD)$, știind că $m(\widehat{A})$, $m(\widehat{C})$ sunt direct proporționale cu 3, 7 și că $m(\widehat{B}) + m(\widehat{D}) = 140°$.

2. Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$ $(AB \parallel CD$ și $DA \perp AB)$ în care $m(\widehat{C}) = 135°$, $CD = 4$ cm și $DA = 6$ cm. Aflați lungimea bazei AB.

3. Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$ $(AB \parallel CD$ și $DA \perp AB)$ în care $AC \perp BD$, $AC = 2AD$ și $BC = 8$ cm. Aflați distanțele AB și CD.

4. Fie triunghiul ABC, E mijlocul lui $[AB]$, F mijlocul lui $[CA]$, G simetricul lui B față de F și H simetricul lui C față de E. Arătați că patrulaterul $EFGH$ este trapez și că $GH = 4EF$.

5. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ în care $m(\widehat{A}) = 64°$. Aflați măsura fiecăruia dintre celelalte unghiuri ale trapezului.

6. Fie trapezul isoscel $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ și $\{O\} = AC \cap BD$. Arătați că $[OA] \equiv [OB]$ și $[OC] \equiv [OD]$.

7. Fie trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ și $\{O\} = AC \cap BD$. Arătați că, dacă $[OA] \equiv [OB]$, atunci $[AD] \equiv [BC]$.

Scanned with OKEN Scanner

8. Fie trapezul isoscel $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ și $DE \perp AB$ $(E \in AB)$. Arătați că $AE = \frac{AB - CD}{2}$.

9. Se consideră trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD,\ AB > CD)$. Arătați că, dacă $[AC$ este bisectoarea unghiului BAD și $[BD$ este bisectoarea unghiului ABC, atunci $[AC] \equiv [BD]$.

10. Se consideră triunghiul ABC în care $AB \neq AC$. Fie $AD \perp BC$ $(D \in BC)$, E mijlocul lui $[BC]$, F mijlocul lui $[CA]$ și G mijlocul lui $[AB]$. Arătați că patrulaterul $DEFG$ este trapez isoscel.

11. Fie trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ și E mijlocul lui $[AB]$. Arătați că, dacă $m(\hat{A}) = 60°$ și $[BC] \equiv [CD] \equiv [DA]$, atunci $EC \perp BD$ și $ED \perp AC$.

12. Fie triunghiul dreptunghic neisoscel ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$, $AD \perp BC$ $(D \in BC)$, M mijlocul lui $[BC]$ și $BE \perp AM$ $(E \in AM)$. Arătați că patrulaterul $ABDE$ este trapez isoscel.

13. Fie paralelogramul $ABCD$, E mijlocul lui $[AB]$, F mijlocul lui $[CD]$, G piciorul perpendicularei din E pe CD și H piciorul perpendicularei din F pe AB. Arătați că patrulaterele $AHGD$ și $CGHB$ sunt trapeze isoscele.

14. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ în care $AB = 12$ cm, $m(\hat{A}) = 60°$ și $AC \perp CB$. Aflați P_{ABCD}.

15. Fie trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD,\ AB > CD)$, $DE \perp AB$ $(E \in AB)$ și F mijlocul lui $[BD]$. Arătați că, dacă $EF \parallel AC$, atunci $[AD] \equiv [BC]$.

16. Se consideră trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD)$. Arătați că bisectoarea unghiului DAB și bisectoarea unghiului ABC se intersectează într-un punct situat pe (CD) dacă și numai dacă $AD + BC = CD$.

17. Fie trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD,\ AB > CD)$, E intersecția bisectoarei unghiului ABC cu dreapta CD și F intersecția bisectoarei unghiului BCD cu dreapta AB. Arătați că patrulaterul $BCEF$ este romb.

18. Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ $(AB \parallel CD,\ DA \perp AB)$ și M mijlocul lui $[BC]$. Arătați că $[MA] \equiv [MD]$.

19. Fie trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ și punctele $E,\ F \in (AD)$ astfel încât $[AE] \equiv [EF] \equiv [FD]$. Paralelele prin E și F la AB intersectează BC în G, respectiv H. Arătați că $EG + FH = AB + CD$.

20. Se consideră trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ în care $AB = 2CD$. Fie E mijlocul lui $[AB]$ și $\{F\} = CE \cap BD$. Paralela prin F la AB intersectează AD în M și BC în N. Arătați că $2MN = 3CD$.

21. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ în care $m(\widehat{BAC}) = 45°$. Fie E mijlocul lui $[AB]$ și F mijlocul lui $[CD]$. Aflați lungimea segmentului EF, știind că linia mijlocie a trapezului are lungimea de 10 cm.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VII

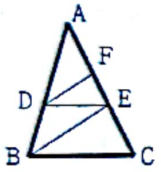
ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

§1. TEOREMA LUI THALES ŞI RECIPROCA EI. TEOREMA BISECTOAREI

PROBLEME REZOLVATE

1. **Fie D un punct pe latura AB a triunghiului ABC ($D \neq A$ şi $D \neq B$). Paralela prin D la BC intersectează AC în E, iar paralela prin D la BE intersectează AC în F. Arătaţi că $AE^2 = AF \cdot AC$.**

Soluţie



Deoarece $DE \parallel BC$, rezultă că $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$ (în baza teoremei lui Thales). Totodată, $\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AE}$ (căci $DE \parallel BE$). Deci, $\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AE}$, ceea ce conduce la $AE^2 = AF \cdot AC$.

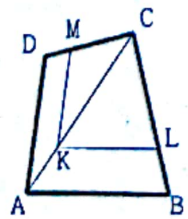
2. **Se consideră triunghiul ABC în care $AB = 15$ cm şi $AC = 20$ cm. Fie punctele $D, E \in (AB)$ astfel încât $D \in (AE)$ şi $AD = 6$ cm, $DE = 3$ cm. Paralelele prin D şi E la BC intersectează AC în F, respectiv G. Aflaţi lungimile segmentelor AG, FG şi GC.**

Soluţie

Întrucât $DE \parallel BC$, rezultă că $\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC}$, ceea ce conduce la $\frac{6}{15} = \frac{AF}{20}$, de unde $AF = 8$ cm. Remarcând faptul că $AE = AD + DE$, deducem că $AE = 9$ cm. Totodată, $\frac{AE}{AB} = \frac{AG}{AC}$ (căci $EG \parallel BC$), de unde $\frac{9}{15} = \frac{AG}{20}$ şi, deci, $AG = 12$ cm. Având în vedere şi faptul că $GC = AC - AG$, conchidem că $GC = 8$ cm.

3. **Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ şi punctele $K \in (AC)$, $L \in (BC)$, $M \in (CD)$ astfel încât $KL \parallel AB$, $KM \parallel AD$. Arătaţi că $\frac{BL}{BC} \cdot \frac{CD}{MD} = 1$ şi $\frac{BL}{BC} + \frac{CM}{CD} = 1$.**

Soluţie

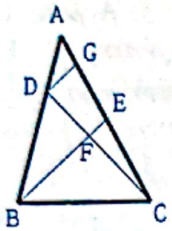


Deoarece $KL \parallel AB$, rezultă că $\frac{BL}{BC} = \frac{AK}{AC}$. Totodată, $\frac{CD}{MD} = \frac{AC}{AK}$ (căci $MK \parallel DA$). Înmulţind aceste egalităţi membru cu membru, obţinem $\frac{BL}{BC} \cdot \frac{CD}{MD} = 1$. Remarcând şi faptul că $\frac{CM}{CD} = \frac{CK}{CA}$, deducem că $\frac{BL}{BC} + \frac{CM}{CD} = \frac{AK}{AC} + \frac{CK}{AC} = \frac{AK + CK}{AC} = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

4. **Se consideră triunghiul ABC în care $AB = 15$ cm, $AC = 18$ cm şi punctele $D \in (AB), E \in (AC)$ astfel încât $AD = 5$ cm, $AE = 9$ cm. Fie $\{F\} = BE \cap CD$. Aflaţi valoarea raportului $\frac{FD}{FC}$.**

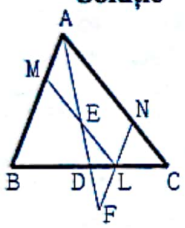
Soluţie



Fie G intersecţia paralelei prin D la BE cu latura AC. Întrucât $DG \parallel BE$, rezultă că $\frac{AD}{AB} = \frac{AG}{AE}$, de unde $AG = 3$ cm. Totodată, $GE = AE - AG$ (căci $G \in (AE)$), deci $GE = 6$ cm. Remarcăm şi faptul că $EC = AC - AE = 9$ cm. Ţinând seama atât de cele stabilite anterior, cât şi de faptul că $\frac{FD}{FC} = \frac{EG}{EC}$ (fiindcă $FE \parallel DG$), deducem că $\frac{FD}{FC} = \frac{2}{3}$.

5. **Se consideră triunghiul ABC şi fie D mijlocul lui $[BC]$, iar L un punct oarecare pe (BC). Fie M intersecţia paralelei prin L la AC cu dreapta AB, N intersecţia paralelei prin L la AB cu dreapta AC, $\{E\} = AD \cap LM$ şi $\{F\} = AD \cap LN$. Arătaţi că $[DE] \equiv [DF]$.**

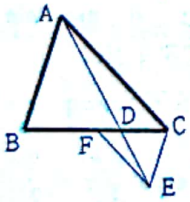
Soluţie



Aplicând teorema lui Thales în triunghiurile DAC şi DAB, obţinem $\frac{DE}{DA} = \frac{DL}{DC}$ (căci $EL \parallel AC$), respectiv $\frac{DF}{DA} = \frac{DL}{DB}$ (fiindcă $FL \parallel AB$). Ţinând seama şi de faptul că $DC = DB$, deducem că $\frac{DE}{DA} = \frac{DF}{DA}$, ceea ce implică $[DE] \equiv [DF]$.

6. **Se consideră triunghiul ABC şi punctul $D \in (BC)$ astfel încât $DB = 2DC$. Fie E intersecţia paralelei prin C la AB cu AD şi F intersecţia paralelei prin E la AC cu BC. Arătaţi că $[FB] \equiv [FC]$.**

Soluţie



Întrucât $CE \parallel AB$, rezultă că $\frac{DE}{DA} = \frac{DC}{DB}$, de unde $\frac{DE}{DA} = \frac{1}{2}$ (căci $DB = 2DC$). Ţinând seama şi de faptul că $\frac{DF}{DC} = \frac{DE}{DA}$ (fiindcă $EF \parallel CA$), deducem că $\frac{DF}{DC} = \frac{1}{2}$, ceea ce conduce la $DF = \frac{DC}{2} = \frac{DB}{4}$. Totodată, $BF = BD - FD$ şi $CF = DC + DF$ (căci $F \in (BD)$ şi $D \in (CF)$), deci $BF = BD - \frac{BD}{4} = \frac{3BD}{4}$, respectiv, $CF = \frac{BD}{2} + \frac{BD}{4} = \frac{3BD}{4}$, ceea ce implică $[BF] \equiv [CF]$.

7. **Se consideră triunghiul ABC şi un punct $M \in (BC)$. Paralela prin M la AB taie dreapta AC în N, iar paralela prin M la AC taie dreapta AB în P. Arătaţi că $\frac{NC}{AC} + \frac{PB}{AB} = 1$. Ce devine relaţia dacă $M \in BC - [BC]$?**

Soluţie

Aplicând teorema lui Thales triunghiului CBA şi dreptei MN ($MN \parallel AB$), obţinem $\frac{NC}{AC} = \frac{MC}{BC}$. Analog, $\frac{PB}{AB} = \frac{MB}{BC}$. Adunând aceste egalităţi membru cu membru,

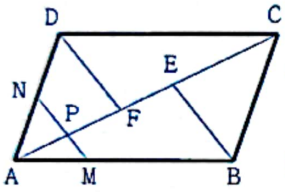
Scanned with OKEN Scanner

obținem $\frac{NC}{AC}+\frac{PB}{AB}=\frac{MC+MB}{BC}$. Cum $MC+MB=BC$ (fiindcă $M\in(BC)$), conchidem că $\frac{NC}{AC}+\frac{PB}{AB}=1$.

Fie $M\in BC-[BC]$ astfel încât $B\in(MC)$. Deoarece $\frac{NC}{AC}=\frac{MC}{BC}$ (căci $MN\parallel AB$) și $\frac{PB}{AB}=\frac{MB}{BC}$ (fiindcă $MP\parallel AC$), rezultă că $\frac{NC}{AC}-\frac{PB}{AB}=\frac{MC-MB}{BC}$. Având în vedere și faptul că $MC-MB=BC$ (căci $B\in(MC)$), deducem că $\frac{NC}{AC}-\frac{PB}{AB}=1$. Analog arătăm că, dacă $M\in BC-[BC]$, iar $C\in(MB)$, atunci $\frac{PB}{AB}-\frac{NC}{AC}=1$.

8. **Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele $M\in(AB), N\in(AD)$ astfel încât $\frac{AM}{AB}=\frac{1}{3}$ și $\frac{AN}{AD}=\frac{1}{2}$. Fie $\{P\}=AC\cap MN$. Aflați raportul $\frac{AP}{AC}$.**

Soluție



Fie E intersecția paralelei prin B la MN cu dreapta AC și F intersecția paralelei prin D la MN cu dreapta AC. Deoarece $[BC]\equiv[DA]$, $\widehat{BCE}\equiv\widehat{DAF}$ (căci $BC\parallel AD$) și $\widehat{CBE}\equiv\widehat{ADF}$ (unghiuri cu laturile respectiv paralele), rezultă că $\Delta BCE\equiv\Delta DAF$, de unde $[CE]\equiv[AF]$. Remarcând și faptul că $\frac{AF}{AP}=\frac{AD}{AN}$ (fiindcă $NP\parallel DF$), iar $\frac{AN}{AD}=\frac{1}{2}$, rezultă că $\frac{EC}{AP}=2$. Pe de altă parte, $\frac{AE}{AP}=3$ (căci $PM\parallel EB$ implică $\frac{AE}{AP}=\frac{AB}{AM}$, iar $\frac{AM}{AB}=\frac{1}{3}$). Ținând seama și de faptul că $\frac{AC}{AP}=\frac{AE}{AP}+\frac{EC}{AP}$, conchidem că $\frac{AC}{AP}=5$, ceea ce implică $\frac{AP}{AC}=\frac{1}{5}$.

9. **Se consideră triunghiul ABC în care $AB=14$ cm, $AC=21$ cm și punctele $E\in(AB), F\in(AC)$ astfel încât $AE=4$ cm, $CF=15$ cm. Arătați că $EF\parallel BC$.**

Soluție

Întrucât $AF=AC-CF$ (căci $F\in(AC)$), rezultă că $AF=6$ cm, deci $\frac{AF}{AC}=\frac{2}{7}$. Remarcând și faptul că $\frac{AE}{AB}=\frac{2}{7}$, deducem că $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$, ceea ce implică $EF\parallel BC$ (în baza reciprocei teoremei lui Thales).

10. **Se consideră semidreptele Ox, Oy, Oz și punctele $A,A'\in(Ox$, $B,B'\in(Oy$, $C,C'\in(Oz$ astfel încât $OA=2$ cm, $OA'=6$ cm, $OC=3$ cm și $CC'=6$ cm. Arătați că $AB\parallel A'B'$ dacă și numai dacă $BC\parallel B'C'$.**

Soluție

Evident, $OC'=OC+CC'=9$ cm.

Să demonstrăm implicația: dacă $AB\parallel A'B'$, atunci $BC\parallel B'C'$.

Deoarece $\frac{OB}{OB'}=\frac{OA}{OA'}$ (căci $AB\parallel A'B'$), rezultă că $\frac{OB}{OB'}=\frac{1}{3}$. Totodată, $\frac{OC}{OC'}=\frac{1}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

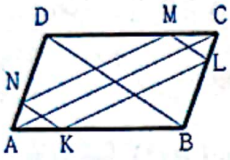
deci $\frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'}$, de unde $BC \parallel B'C'$ (în baza reciprocei teoremei lui Thales).

Să demonstrăm implicația: dacă $BC \parallel B'C'$, atunci $AB \parallel A'B'$.

Întrucât $\frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'}$ (fiindcă $BC \parallel B'C'$), rezultă că $\frac{OB}{OB'} = \frac{1}{3}$. Remarcând și faptul că $\frac{OA}{OA'} = \frac{1}{3}$, deducem că $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$, ceea ce conduce la $AB \parallel A'B'$.

11. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctul $K \in (AB)$. Paralela prin K la AC intersectează BC în L, paralela prin L la BD intersectează CD în M și paralela prin M la AC intersectează DA în N. Arătați că patrulaterul $KLMN$ este paralelogram.

Soluție

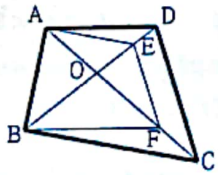


Întrucât $KL \parallel AC$ și $MN \parallel AC$, rezultă că $KL \parallel MN$. Remarcând faptul că $\frac{AK}{KB} = \frac{CL}{LB}$ (căci $KL \parallel AC$), $\frac{CL}{LB} = \frac{CM}{MD}$ (fiindcă $LM \parallel BD$) și $\frac{CM}{MD} = \frac{AN}{ND}$ (pentru că $MN \parallel AC$), deducem că $\frac{AK}{KB} = \frac{AN}{ND}$, ceea ce implică $KN \parallel BD$. Cum $BD \parallel LM$, rezultă că $KN \parallel LM$.

Ca urmare a celor stabilite anterior, patrulaterul $KLMN$ este paralelogram.

12. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ și fie E intersecția paralelei prin A la BC cu dreapta BD, iar F intersecția paralelei prin B la AD cu dreapta AC. Arătați că $EF \parallel CD$.

Soluție

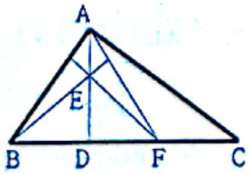


Fie $\{O\} = AC \cap BD$.

Aplicând teorema lui Thales triunghiului OBC și dreptei AE ($AE \parallel BC$), obținem $\frac{OB}{OE} = \frac{OC}{OA}$. Analog, $\frac{OD}{OB} = \frac{OA}{OF}$. Înmulțind aceste egalități membru cu membru, obținem $\frac{OD}{OE} = \frac{OC}{OF}$, ceea ce, în baza reciprocei teoremei lui Thales, conduce la $EF \parallel CD$.

13. Fie triunghiul dreptunghic $ABC\left(m(\hat{A}) = 90°\right)$, D piciorul perpendicularei din A pe BC și punctele $E \in (AD), F \in (DC)$. Arătați că $BE \perp AF$ dacă și numai dacă $\frac{AE}{AD} = \frac{CF}{CD}$.

Soluție



1) Să demonstrăm implicația: dacă $BE \perp AF$, atunci $\frac{AE}{AD} = \frac{CF}{CD}$. Deoarece $AD \perp BF$ și $BE \perp AF$, rezultă că E este ortocentrul triunghiului ABF, deci $FE \perp AB$. Remarcând și faptul că $CA \perp AB$ (căci $m(\widehat{CAB}) = 90°$), deducem că $FE \parallel CA$, ceea ce implică $\frac{AE}{AD} = \frac{CF}{CD}$.

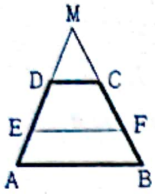
2) Să demonstrăm implicația: dacă $\frac{AE}{AD} = \frac{CF}{CD}$, atunci $BE \perp AF$.

Întrucât $\frac{AE}{AD} = \frac{CF}{CD}$, în baza reciprocei teoremei lui Thales, deducem că $EF \parallel AC$, ceea ce, împreună cu $AB \perp AC$, conduce la $EF \perp AB$. Ținând seama și de faptul că $AD \perp BF$, iar $E \in AD$, conchidem că E este ortocentrul triunghiului ABF, deci $BE \perp AF$.

Scanned with OKEN Scanner

14. Se consideră trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ şi punctele $E \in (AD)$, $F \in (BC)$ astfel încât $\frac{EA}{ED} = \frac{FB}{FC}$. Arătaţi că $EF \parallel AB$.

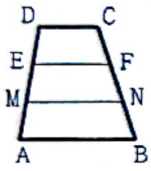
Soluţie



Fie $\{M\} = AD \cap BC$. Pentru a demonstra că $EF \parallel AB$, este suficient să arătăm că $EF \parallel DC$, ceea ce impune să dovedim că $\frac{DM}{DE} = \frac{CM}{CF}$. Deoarece (în triunghiul MAB) $DC \parallel AB$, rezultă că $\frac{DM}{DA} = \frac{CM}{CB}$. Din faptul că $\frac{EA}{ED} = \frac{FB}{FC}$ deducem că $\frac{EA+ED}{ED} = \frac{FB+FC}{FC}$, de unde $\frac{DA}{DE} = \frac{CB}{CF}$. Înmulţind egalităţile $\frac{DM}{DA} = \frac{CM}{CB}$ şi $\frac{DA}{DE} = \frac{CB}{CF}$ membru cu membru, obţinem $\frac{DM}{DE} = \frac{CM}{CF}$, ceea ce încheie rezolvarea problemei.

15. Se consideră trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ şi punctele $E \in (AD)$, $F \in (BC)$ astfel încât $EA = 2ED$ şi $FB = 2FC$. Arătaţi că $3EF = AB + 2CD$.

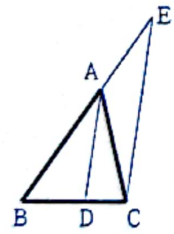
Soluţie



Deoarece $\frac{EA}{ED} = \frac{FB}{FC}$, rezultă că $EF \parallel AB$. Fie M mijlocul lui $[AE]$ şi N mijlocul lui $[BF]$. Întrucât patrulaterul $ABFE$ este trapez, iar $[MN]$ este linie mijlocie în trapez, rezultă că $EF + AB = 2MN$. Evident, $MN \parallel CD$. Remarcând şi faptul că $[ED] \equiv [EM]$ şi $[FC] \equiv [FN]$, deducem că $MN + CD = 2EF$. Din cele stabilite anterior rezultă că $EF + AB = 2(2EF - CD)$, ceea ce conduce la $3EF = AB + 2CD$.

16. Fie D un punct pe latura BC a triunghiului ABC $(D \neq B,\ D \neq C)$. Arătaţi că $[AD$ este bisectoarea unghiului BAC dacă şi numai dacă $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (teorema bisectoarei).

Soluţie



Fie E intersecţia paralelei prin C la AD cu dreapta BA. Rezultă că $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AE}$. Totodată, $\widehat{AEC} = \widehat{BAD}$ (unghiuri corespondente) şi $\widehat{ACE} \equiv \widehat{CAD}$ (unghiuri alterne interne).

Dacă $\widehat{BAD} \equiv \widehat{CAD}$, atunci $\widehat{AEC} \equiv \widehat{ACE}$, ceea ce implică $[AE] \equiv [AC]$ şi, deci, $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (căci $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AE}$).

Dacă $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$, atunci $\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{AE}$, de unde $[AC] \equiv [AE]$, ceea ce conduce la $\widehat{AEC} \equiv \widehat{ACE}$. Deducem imediat că $\widehat{BAD} \equiv \widehat{CAD}$.

17. Fie $[AD$ bisectoarea unghiului BAC al triunghiului ABC $(D \in BC)$. Arătaţi că $AB + BD = AC + CD$ dacă şi numai dacă $[AB] \equiv [AC]$.

Soluţie

Să demonstrăm implicaţia: dacă $[AB] \equiv [AC]$, atunci $AB + BD = AC + CD$.

Deoarece $[AB] \equiv [AC]$ şi $\widehat{BAD} \equiv \widehat{CAD}$, rezultă că $[BD] \equiv [CD]$. Prin urmare, $AB + BD = AC + CD$.

Scanned with OKEN Scanner

Să demonstrăm implicația: dacă $AB+BD=AC+CD$, atunci $[AB]\equiv[AC]$.

Întrucât $[AD$ este bisectoarea unghiului BAC, rezultă că $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$, de unde $\frac{AB}{AC}=\frac{AB+BD}{AC+CD}=1$ (căci $AB+BD=AC+CD$), ceea ce implică $[AB]\equiv[AC]$.

18. Fie D un punct pe latura BC a triunghiului ABC $(D\neq B,\ D\neq C)$, E intersecția bisectoarei unghiului ADB cu latura AB și F intersecția bisectoarei unghiului ADC cu latura AC. Arătați că $EF\parallel BC$ dacă și numai dacă $[DB]\equiv[DC]$.

Soluție

Deoarece $[DE$ este bisectoarea unghiului ADB (în triunghiul ABD), iar $[DF$ este bisectoarea unghiului ADC (în triunghiul ACD), rezultă că $\frac{EA}{EB}=\frac{DA}{DB}$, respectiv $\frac{FA}{FC}=\frac{DA}{DC}$. Dacă $EF\parallel BC$, atunci $\frac{EA}{EB}=\frac{FA}{FC}$, ceea ce, împreună cu egalitățile anterioare, conduce la $\frac{DA}{DB}=\frac{DA}{DC}$, de unde $[DB]\equiv[DC]$. Dacă $[DB]\equiv[DC]$, atunci $\frac{EA}{EB}=\frac{FA}{FC}$, ceea ce implică $EF\parallel BC$.

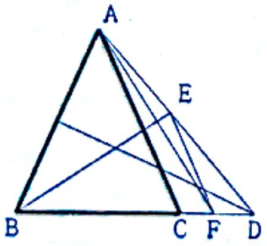
19. Fie triunghiul ABC $(AB\neq AC)$, $AD\perp BC$ $(D\in BC)$ și E mijlocul lui $[BC]$. Arătați că, dacă $\widehat{BAD}\equiv\widehat{DAE}\equiv\widehat{EAC}$, atunci $m(\widehat{BAC})=90°$.

Soluție

Întrucât $AD\perp BE$ și $\widehat{BAD}\equiv\widehat{DAE}$, rezultă că $BD=DE$, de unde $BE=2DE$, ceea ce implică $EC=2DE$ (căci $EC=BE$). Remarcând și faptul că $\frac{DE}{EC}=\frac{AD}{AC}$ (fiindcă, în triunghiul ACD, $[AE$ este bisectoarea unghiului DAC), deducem că $AD=\frac{AC}{2}$. Totodată, $m(\widehat{ADC})=90°$, deci $m(\widehat{ACD})=30°$, ceea ce conduce la $m(\widehat{DAC})=60°$. Având în vedere și faptul că $\widehat{BAD}\equiv\widehat{DAE}\equiv\widehat{EAC}$, conchidem că $m(\widehat{BAC})=90°$.

20. Se consideră triunghiul isoscel ABC $([AB]\equiv[AC])$. Mediatoarea laturii AB intersectează dreapta BC în D, bisectoarea unghiului ABC intersectează dreapta AD în E, iar bisectoarea unghiului CAD intersectează dreapta BC în F. Arătați că $EF\parallel AC$.

Soluție



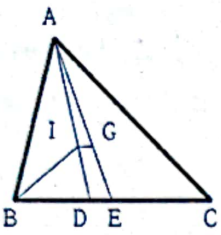
Deoarece (în triunghiul ABD) $[BE$ este bisectoarea unghiului ABD, rezultă că $\frac{EA}{ED}=\frac{BA}{BD}$. Întrucât (în triunghiul ACD) $[AF$ este bisectoarea unghiului CAD, rezultă că $\frac{FC}{FD}=\frac{AC}{AD}$. Ținând seama atât de cele stabilite anterior, cât și de faptul că $BA=AC$, iar $BD=AD$ (căci D este situat pe mediatoarea laturii AB), deducem că $\frac{EA}{ED}=\frac{FC}{FD}$, de unde $EF\parallel AC$.

21. Se consideră triunghiul ABC în care $AB=10$ cm, $BC=11$ cm și $CA=12$ cm. Fie G centrul de greutate al triunghiului și I centrul cercului înscris în triunghi. Arătați că $GI\parallel BC$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție

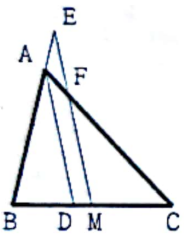
Fie D intersecția bisectoarei unghiului BAC cu latura BC și E mijlocul lui $[BC]$ (evident, $I \in (AD)$ și $G \in (AE)$). Deoarece $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$, rezultă că $\frac{DB}{DC} = \frac{5}{6}$,



ceea ce conduce la $\frac{DB}{BC} = \frac{5}{11}$, de unde $DB = 5\,\text{cm}$. Cum I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, rezultă că $[BI$ este bisectoarea unghiului ABD, de unde $\frac{IA}{ID} = \frac{BA}{BD}$. Drept urmare, $\frac{IA}{ID} = 2$. Remarcând și faptul că $\frac{GA}{GE} = 2$ (căci G este centrul de greutate al triunghiului ABC), deducem că $\frac{IA}{ID} = \frac{GA}{GE}$, de unde $IG \parallel DE$, ceea ce este totuna cu $GI \parallel BC$.

22. Se consideră triunghiul ABC în care $AB \neq AC$. Fie M mijlocul lui $[BC]$, D intersecția bisectoarei unghiului BAC cu latura BC. Paralela prin M la AD intersectează dreptele AB și AC în E, respectiv F. Arătați că $[BE] \equiv [CF]$.

Soluție



Pentru fixare, să presupunem că $AB < AC$.

Deoarece (în triunghiul BEM) $AD \parallel ME$, rezultă că $\frac{BM}{BD} = \frac{BE}{BA}$, de unde $BM = BE \cdot \frac{BD}{BA}$. Întrucât (în triunghiul ACD) $MF \parallel AD$, rezultă că $\frac{CM}{CD} = \frac{CF}{CA}$, ceea ce conduce la $CM = CF \cdot \frac{CD}{CA}$. Remarcând și faptul că $BM = CM$, deducem că $BE \cdot \frac{BD}{BA} = CF \cdot \frac{CD}{CA}$. Totodată, $\frac{BD}{BA} = \frac{CD}{CA}$ (căci $[AD$ este bisectoarea unghiului BAC), deci $BE = CF$, ceea ce implică $[BE] \equiv [CF]$.

PROBLEME PROPUSE

1. Se consideră trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD$ și $AB > CD)$ în care $BC = 9$ cm, $CD = 8$ cm și $DA = 6$ cm. Fie $\{E\} = AD \cap BC$. Aflați P_{CDE}, știind că $EA = 18$ cm.

2. Fie O punctul de intersecție a diagonalelor trapezului $ABCD$ $(AB \parallel CD)$. Aflați BD, știind că $OA = 6$ cm, $OB = 8$ cm și $AC = 9$ cm.

3. Se consideră triunghiul ABC în care $AB = 18$ cm și $AC = 27$ cm. Fie punctele $D, E \in (AB)$ astfel încât $AD = 4$ cm și $EB = 8$ cm. Paralele prin D și E la BC intersectează AC în F, respectiv G. Aflați lungimea fiecăruia dintre segmentele AF, FG și GC.

4. Se consideră triunghiul ABC în care $AB = 12$ cm, $BC = 20$ cm și $CA = 16$ cm. Fie punctul $K \in (AB)$ astfel încât $AK = 3$ cm. Paralela prin K la BC intersectează AC în L, paralela prin K la AC intersectează BC în M, iar paralela prin L la AB intersectează BC în N. Aflați lungimea segmentului MN.

Scanned with OKEN Scanner

5. Se consideră paralelogramul $ABCD$ în care $AB = 20$ cm și $BC = 15$ cm. Fie punctul $M \in (AC)$ astfel încât $\frac{MA}{MC} = \frac{2}{3}$. Paralela prin M la BC intersectează AB în E, iar paralela prin M la AB intersectează AD în F. Aflați P_{AEMF}.

6. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Paralela prin G la BC intersectează AB în E și AC în F. Aflați lungimea fiecăruia dintre segmentele AB, EB, AC și AF, știind că $AE = 8$ cm și $FC = 6$ cm.

7. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Paralela prin G la AB intersectează BC în E, iar paralela prin G la AC intersectează BC în F. Arătați că $[BE] \equiv [EF] \equiv [FC]$.

8. Se consideră triunghiul ABC și punctul $D \in (BC)$. Paralela prin D la AB intersectează AC în E, iar paralela prin D la AC intersectează AB în F. Arătați că $\frac{AF}{AB} + \frac{AE}{AC} = 1$.

9. Se consideră trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD$ și $AB > CD)$ în care $AC = 16$ cm, $BC = 12$ cm și $BD = 20$ cm. Fie punctul $K \in (AD)$ astfel încât $\frac{KA}{KD} = \frac{1}{3}$. Paralela prin K la AB intersectează AC în L, BD în M și BC în N. Aflați lungimea fiecăruia dintre segmentele: LA, LC, MB, MD, NB și NC.

10. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctul $E \in (AB)$. Fie $\{F\} = CE \cap AD$. Arătați că $EA \cdot BC = EB \cdot AF$.

11. Fie triunghiul ABC și punctele $E \in (AB), F \in (AC)$. Arătați că:
a) dacă $AB = 15$ cm, $AC = 12$ cm, $AE = 10$ cm și $CF = 4$ cm, atunci $EF \parallel BC$;
b) dacă $AB = 20$ cm, $EB = 12$ cm, $AF = 6$ cm și $FC = 9$ cm, atunci $EF \parallel BC$.

12. Fie semidreptele distincte $(Ox, (Oy, (Oz$ și punctele $A, A' \in (Ox$, $B, B' \in (Oy$, $C, C' \in (Oz$. Arătați că, dacă $AB \parallel A'B'$ și $BC \parallel B'C'$, atunci $AC \parallel A'C'$.

13. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctul $M \in (AC)$. Paralela prin M la AB intersectează AD în E și BC în F, iar paralela prin M la BC intersectează AB în G și CD în H. Arătați că $EG \parallel FH$.

14. Fie M mijlocul laturii BC a triunghiului ABC, D un punct oarecare pe (AM), $\{E\} = BD \cap AC$ și $\{F\} = CD \cap AB$. Arătați că $EF \parallel BC$.
Indicație. Ducem $MK \parallel BE (K \in AC)$ și $ML \parallel CF (L \in AB)$.

15. Fie trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ și punctele $E \in (AD)$, $F \in (BC)$ astfel încât $EA = 3ED$ și $FB = 3FC$. Arătați că $4EF = AB + 3CD$.

16. Se consideră triunghiul ABC în care $AB = 12$ cm și $BC = 18$ cm. Fie D intersecția bisectoarei unghiului ABC cu latura AC și E intersecția paralelei prin D la AB cu latura BC. Arătați că $3EB = 2EC$.

Scanned with OKEN Scanner

17. Fie D un punct pe latura BC a triunghiului ABC $(D \neq B$ şi $D \neq C)$, E intersecţia bisectoarei unghiului ADB cu latura AB şi F intersecţia bisectoarei unghiului ADC cu latura AC. Arătaţi că $AE \cdot BD \cdot CF = AF \cdot BE \cdot CD$.

18. Se consideră triunghiul ABC. Fie M mijlocul lui $[BC]$, D intersecţia bisectoarei unghiului BAC cu latura BC, iar E şi F intersecţiile paralelei prin D la AM cu AC, respectiv AB. Arătaţi că dacă $DB = 6$ cm şi $DC = 4$ cm, atunci $3AE = 2AF$.

19. Se consideră paralelogramul $ABCD$. Bisectoarea unghiului BAD intersectează BD în E, iar bisectoarea unghiului ABC intersectează AC în F. Arătaţi că $EF \parallel AB$.

20. Fie triunghiul dreptunghic ABC $\left(m(\hat{A}) = 90°\right)$, D intersecţia bisectoarei unghiului BAC cu latura BC şi E intersecţia paralelei prin C la AD cu dreapta AB. Arătaţi că, dacă $BC = 3BD$, atunci $[BE] \equiv [AC]$.

RĂSPUNSURI

1. 38 cm **2.** 12 cm **3.** 6 cm, 9 cm, 12 cm **4.** 5 cm **5.** 28 cm **6.** $AB = 12$ cm, $AC = 18$ cm **9.** $LA = 4$ cm, $LC = 12$ cm, $MB = 5$ cm, $MD = 15$ cm, $NB = 3$ cm, $NC = 9$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

§2. TEOREMA FUNDAMENTALĂ A ASEMĂNĂRII. CAZURILE DE ASEMĂNARE A TRIUNGHIURILOR

PROBLEME REZOLVATE

1. **Se consideră triunghiurile asemenea** ABC **şi** DEF. **Ştiind că** $m(\hat{A}) = 48°$ **şi** $m(\hat{E}) = 64°$, **aflaţi** $m(\hat{B}), m(\hat{C}), m(\hat{D})$ **şi** $m(\hat{F})$.

Soluţie

Deoarece $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, rezultă că $\hat{A} \equiv \hat{D}$, $\hat{B} \equiv \hat{E}$ şi $\hat{C} \equiv \hat{F}$, deci $m(\hat{D}) = 48°$, $m(\hat{B}) = 64°$. Ţinând seama şi de faptul că $m(\hat{C}) = 180° - [m(\hat{A}) + m(\hat{B})]$, deducem că $m(\hat{C}) = m(\hat{F}) = 68°$.

2. **Se consideră triunghiurile asemenea** ABC **şi** DEF. **Ştiind că** $AB = 10$ cm, $BC = 12$ cm, $CA = 8$ cm **şi că** $P_{DEF} = 15$ cm, **aflaţi lungimea fiecăreia dintre laturile triunghiului** DEF.

Soluţie

Întrucât $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{FD}{CA}$ (căci $\Delta DEF \sim \Delta ABC$), rezultă că $\frac{DE}{10} = \frac{EF}{12} = \frac{FD}{8} = \frac{DE + EF + FD}{10 + 12 + 8} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$, de unde $DE = 5$ cm, $EF = 6$ cm şi $FD = 4$ cm.

3. **Fie triunghiul dreptunghic** ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$, $AD \perp BC$ $(D \in BC)$ **şi** E **mijlocul lui** $[BC]$. **Determinaţi măsura fiecăruia dintre unghiurile ascuţite ale triunghiului** ABC, **ştiind că** $\Delta ADE \sim \Delta CAB$.

Soluţie

Deoarece $\Delta ADE \sim \Delta CAB$, rezultă că $\widehat{AED} \equiv \widehat{CBA}$. Totodată, $m(\widehat{AED}) = m(\widehat{ACE}) + m(\widehat{CAE})$ (căci $\widehat{AED}$ este unghi exterior al triunghiului ACE), de unde $m(\widehat{AED}) = 2m(\widehat{ACE}) = 2m(\widehat{ACB})$ (fiindcă $[EA] \equiv [EC]$). Deci, $m(\widehat{CBA}) = 2m(\widehat{ACB})$. Remarcând şi faptul că $m(\widehat{CBA}) + m(\widehat{ACB}) = 90°$, deducem că $m(\widehat{ACB}) = 30°$ şi $m(\widehat{CBA}) = 60°$.

4. **Fie trapezul** $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ **şi** $\{O\} = AC \cap BD$. **Aflaţi lungimea fiecăruia dintre segmentele** AB **şi** AC, **ştiind că** $OB = 6$ cm, $OC = 3$ cm, $OD = 2$ cm **şi** $CD = 5$ cm.

Soluţie

Întrucât $\Delta OAB \sim \Delta OCD$ (căci $AB \parallel CD$), rezultă că $\frac{AB}{CD} = \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$, de unde $\frac{AB}{5} = \frac{OA}{3} = 3$, ceea ce conduce la $AB = 15$ cm şi $OA = 9$ cm. Având în vedere şi faptul că $AC = AO + OC$, deducem că $AC = 12$ cm.

5. **Se consideră trapezul** $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ **în care** $AB = 15$ cm, $BC = 8$ cm, $CD = 9$ cm **şi** $DA = 10$ cm. **Fie** $\{E\} = AD \cap BC$. **Aflaţi perimetrul triunghiului** CDE.

Soluţie

Deoarece $\Delta EDC \sim \Delta EAB$ (căci $DC \parallel AB$), rezultă că $\frac{ED}{EA} = \frac{EC}{EB} = \frac{DC}{AB} = \frac{3}{5}$, de unde $\frac{ED}{EA - ED} = \frac{EC}{EB - EC} = \frac{3}{2}$, ceea ce conduce la $\frac{ED}{AD} = \frac{EC}{BC} = \frac{3}{2}$. Drept urmare, $\frac{ED}{10} =$

Scanned with OKEN Scanner

$= \frac{EC}{8} = \frac{3}{2}$, de unde $ED = 15$ cm, $EC = 12$ cm și, deci, $P_{CDE} = 36$ cm.

6. **Fie triunghiul ABC, D mijlocul lui $[BC]$ și M un punct pe (AD). Paralela prin M la BC intersectează AB în E și AC în F. Arătați că $[ME] \equiv [MF]$.**

Soluție

Întrucât $EM \parallel BD$, rezultă că $\Delta AEM \sim \Delta ABD$, de unde $\frac{ME}{DB} = \frac{AM}{AD}$. Deoarece $MF \parallel DC$, rezultă că $\Delta AME \sim \Delta ADC$, ceea ce implică $\frac{AM}{AD} = \frac{MF}{DC}$. Prin urmare, $\frac{ME}{DB} = \frac{MF}{DC}$. Ținând seama și de faptul că $DB = DC$, deducem că $ME = MF$, deci $[ME] \equiv [MF]$.

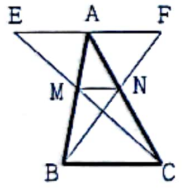
7. **Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și E, F intersecțiile paralelei prin G la BC cu AB, respectiv AC. Aflați distanța EF, știind că $BC = 12$ cm.**

Soluție

Fie D mijlocul laturii $[BC]$. Rezultă că $G \in (AD)$ și că $\frac{AG}{AD} = \frac{2}{3}$. Remarcăm și faptul că $[GE] \equiv [GC]$, deci $EF = 2GE$. Deoarece $\Delta AEG \sim \Delta ABD$ (căci $EG \parallel BD$), rezultă că $\frac{GE}{DB} = \frac{AG}{AD}$, de unde $GE = 4$ cm. Drept urmare, $EF = 8$ cm.

8. **Se consideră triunghiul ABC și punctele $M \in (AB), N \in (AC)$ astfel încât $MN \parallel BC$. Paralela prin A la BC intersectează CM în E și BN în F. Arătați că $[AE] \equiv [AF]$.**

Soluție



Deoarece $\Delta MAE \sim \Delta MBC$ (căci $AE \parallel BC$) și $\Delta NAF \sim \Delta NCB$ (fiindcă $AF \parallel BC$), rezultă că $\frac{AE}{BC} = \frac{MA}{MB}$, respectiv $\frac{AF}{CB} = \frac{NA}{NC}$. Remarcând și faptul că $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NC}$ (pentru că $MN \parallel BC$), deducem că $\frac{AE}{BC} = \frac{AF}{BC}$, de unde $[AE] \equiv [AF]$.

9. **Se consideră triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) în care $AB = 12$ cm și $BC = 20$ cm. Fie D intersecția bisectoarei unghiului ABC cu latura AC și E intersecția paralelei prin D la BC cu latura AB. Aflați P_{ADE}.**

Soluție

Întrucât $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC}$ (căci $[BD$ este bisectoarea unghiului $ABC)$, rezultă că $\frac{DA}{DC} = \frac{3}{5}$, ceea ce conduce la $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{8}$ și, deci, $AD = 4{,}5$ cm. Totodată, $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC}$ (fiindcă $ED \parallel BC$ implică $\Delta AED \sim \Delta ABC$), de unde $\frac{AE}{12} = \frac{ED}{20} = \frac{3}{8}$. Drept urmare, $AE = 4{,}5$ cm, $ED = 7{,}5$ cm, iar $P_{ADE} = 16{,}5$ cm.

10. **Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90°$) în care $BC = 12$ cm și $m(\hat{B}) = 60°$. Fie $AD \perp BC (D \in BC)$ și E intersecția paralelei prin D la AB cu latura AC. Aflați lungimea segmentului DE.**

Soluție

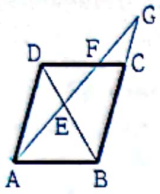
Deoarece $m(\hat{A}) = 90°$ și $m(\hat{C}) = 30°$ (în triunghiul ABC), rezultă că $AB = \frac{BC}{2} = 6$ cm. Totodată, $m(\widehat{ADB}) = 90°$ și $m(\widehat{BAD}) = 30°$ (căci $\widehat{BAD} \equiv \widehat{ACB}$).

Scanned with OKEN Scanner

deci $BD = \frac{AB}{2} = 3$ cm, de unde $DC = 9$ cm (fiindcă $DC = BC - BD$). Remarcând faptul că $\Delta CDE \sim \Delta CBA$ (căci $DE \parallel AB$), deducem că $\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{CB}$, ceea ce implică $\frac{DE}{6} = \frac{3}{4}$ și, deci, $DE = 4{,}5$ cm.

11. O dreaptă oarecare dusă prin vârful A al paralelogramului $ABCD$ intersectează (BD) în E, (CD) în F și BC în G. Arătați că $AE^2 = EF \cdot EG$.

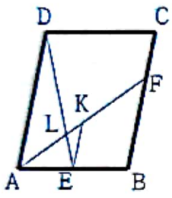
Soluție



Întrucât $\Delta ABE \sim \Delta FDE$ (căci $DF \parallel AB$), iar $\Delta ADE \sim \Delta GBE$ (fiindcă $AD \parallel BG$), rezultă că $\frac{AE}{FE} = \frac{BE}{DE}$, respectiv $\frac{BE}{DE} = \frac{EG}{EA}$, de unde $\frac{AE}{EF} = \frac{EG}{AE}$, ceea ce conduce la egalitatea pe care trebuia să o demonstrăm.

12. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele $E \in (AB)$, $F \in (BC)$ astfel încât $[EA] \equiv [EB]$ și $FB = 2FC$. Fie $\{L\} = AF \cap DE$. Arătați că $LD = 3LE$.

Soluție

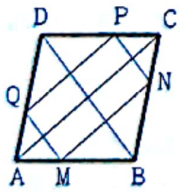


Fie K intersecția paralelei prin E la BC cu dreapta AF. Rezultă că $\Delta LEK \sim \Delta LDA$, de unde $\frac{LE}{LD} = \frac{EK}{DA}$. Din faptul că $EK = \frac{BF}{2}$ (căci $[EK]$ este linie mijlocie în triunghiul ABF), iar $BF = \frac{2BC}{3}$, deducem că $EK = \frac{BC}{3}$, ceea ce conduce la $\frac{EK}{DA} = \frac{1}{3}$ (fiindcă $BC = DA$). Ca urmare a celor stabilite anterior, $\frac{LE}{LD} = \frac{1}{3}$ și, deci, $LD = 3LE$.

13. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$, $Q \in (DA)$ astfel încât $MN \parallel AC$, $NP \parallel BD$ și $PQ \parallel AC$. Arătați că:

a) $MQ \parallel NP$; b) $\frac{MN}{AC} + \frac{NP}{BD} = 1$.

Soluție



a) Deoarece $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{NB}$ (căci $MN \parallel AC$), $\frac{CN}{NB} = \frac{CP}{PD}$ (fiindcă $NP \parallel BD$) și $\frac{CP}{PD} = \frac{AQ}{QD}$ (pentru că $PQ \parallel AC$), rezultă că $\frac{AM}{MB} = \frac{AQ}{QD}$, ceea ce conduce la $MQ \parallel BD$. Cum $BD \parallel NP$, conchidem că $MQ \parallel NP$.

b) Remarcând că $\Delta BMN \sim \Delta BAC$ (căci $MN \parallel AC$) și $\Delta CNP \sim \Delta CBD$ (fiindcă $NP \parallel BD$), deducem că $\frac{MN}{AC} = \frac{BN}{BC}$, respectiv $\frac{NP}{BD} = \frac{NC}{BC}$. Adunând aceste egalități membru cu membru, obținem $\frac{MN}{AC} + \frac{NP}{BD} = \frac{BN + NC}{BC} = 1$, ceea ce trebuia demonstrat.

14. Prin vârful A al paralelogramului $ABCD$ se duce o dreaptă d care intersectează prelungirile laturilor BC și CD în M, respectiv N. Arătați că:

a) $MB \cdot ND = \text{const}$ (nu depinde de poziția dreptei d);

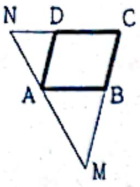
b) $MC \cdot AB + NC \cdot BC = MC \cdot NC$.

Soluție

a) Deoarece $\frac{MB}{BC} = \frac{MA}{AN}$ (căci $AB \parallel NC$) și $\frac{MA}{AN} = \frac{CD}{DN}$, rezultă că $\frac{MB}{BC} = \frac{CD}{ND}$, de unde

Scanned with OKEN Scanner

$MB \cdot ND = BC \cdot CD = \text{const.}$



b) Remarcând că $\frac{AB}{NC} = \frac{MA}{MN}$ (fiindcă $AB \parallel NC$ implică $\Delta MAB \sim \Delta MNC$) și $\frac{AD}{MC} = \frac{NA}{NM}$ (căci $AD \parallel MC$ implică $\Delta NAD \sim \Delta NMC$), deducem că $\frac{AB}{NC} + \frac{AD}{MC} = \frac{MA + NA}{MN}$, de unde $\frac{AB}{NC} + \frac{BC}{MC} = 1$, ceea ce conduce la $MC \cdot AB + NC \cdot BC = MC \cdot NC$.

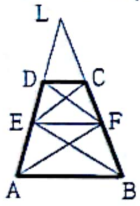
15. Se consideră triunghiul ABC în care $AB = 10$ cm, $BC = 12$ cm și $CA = 14$ cm. Fie punctele $E \in (AB)$, $F \in (AC)$ astfel încât $EF \parallel BC$ și, totodată, perimetrul triunghiului AEF să fie egal cu perimetrul trapezului $BCFE$. Calculați lungimea segmentului EF.

Soluție

Întrucât cele două perimetre menționate în enunțul problemei sunt egale, rezultă că $AE + AF + EF = EF + FC + BC + EB$, ceea ce conduce la $AE + AF = EB + FC + BC$. Adunând la ambii membri ai ultimei egalități $AE + AF$, obținem $2(AE + AF) = AB + BC + CA$, de unde $AE + AF = 18$ cm. Totodată, $\Delta AEF \sim \Delta ABC$ (căci $EF \parallel BC$), deci $\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$, ceea ce implică $\frac{EF}{BC} = \frac{AE + AF}{AB + AC}$. Drept urmare, $\frac{EF}{12} = \frac{18}{24}$, de unde $EF = 9$ cm.

16. Fie trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$) și punctele $E \in (AD)$, $F \in (BC)$ astfel încât $AF \parallel CE$. Arătați că $BE \parallel DF$.

Soluție

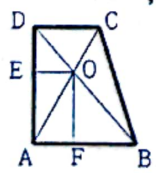


Fie $\{L\} = AD \cap BC$.

Deoarece $\Delta LDC \sim \Delta LAB$ (căci $DC \parallel AB$), rezultă că $\frac{LD}{LA} = \frac{LC}{LB}$, de unde $LB \cdot LD = LA \cdot LC$. Din faptul că $\Delta LEC \sim \Delta LAF$ (fiindcă $EC \parallel AF$) deducem că $\frac{LE}{LA} = \frac{LC}{LF}$, ceea ce implică $LE \cdot LF = LA \cdot LC$. Drept urmare, $LB \cdot LD = LE \cdot LF$, ceea ce conduce la $\frac{LD}{LE} = \frac{LF}{LB}$, de unde $DF \parallel BE$.

17. Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ ($AB \parallel CD$ și $DA \perp AB$), $\{O\} = AC \cap BD$, E piciorul perpendicularei din O pe AD și F piciorul perpendicularei din O pe AB. Arătați că, dacă $AB = a$, $CD = b$ și $AD = c$, atunci $OE = \frac{ab}{a+b}$ și $OF = \frac{ac}{a+b}$.

Soluție



Întrucât $\Delta OAB \sim \Delta OCD$ (căci $AB \parallel CD$), rezultă că $\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD}$, ceea ce implică $\frac{OA}{AC} = \frac{AB}{AB + CD}$, de unde $\frac{AO}{AC} = \frac{a}{a+b}$. Remarcând faptul că $\Delta AOE \sim \Delta ACD$ (fiindcă $OE \perp AD$ și $CD \perp AD$ implică $OE \parallel CD$), deducem că $\frac{OE}{CD} = \frac{AE}{AD} = \frac{AO}{AC}$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $\frac{OE}{b} = \frac{a}{a+b}$, de unde $OE = \frac{ab}{a+b}$. Totodată, $\frac{AE}{c} = \frac{a}{a+b}$, deci $AE = \frac{ac}{a+b}$. Cum $OF = AE$ (căci patrulaterul $AEOF$ este dreptunghi), rezultă că $OF = \frac{ac}{a+b}$.

18. Fie trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$ și $AB > CD$), E mijlocul lui $[AB]$ și $\{F\} = CE \cap BD$.

Scanned with OKEN Scanner

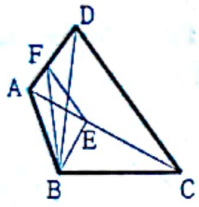
Paralela prin F la AB intersectează AD în L, AC în M și BC în N. Arătați că $[LM] \equiv [MF] \equiv [FN]$.

Soluție

Deoarece (în triunghiul CAB) $[CE]$ este mediana laturii AB, iar $MN \parallel AB$ și $\{F\} = CE \cap MN$, rezultă că $[MF] \equiv [FN]$. Din faptul că $\triangle ALM \sim \triangle ADC$ (căci $LM \parallel DC$) și $\triangle BFN \sim \triangle BDC$ (fiindcă $FN \parallel DC$) deducem că $\frac{LM}{DC} = \frac{AL}{AD}$, respectiv $\frac{FN}{DC} = \frac{BN}{BC}$. Totodată, $\frac{AL}{AD} = \frac{BN}{BC}$ (pentru că $AB \parallel LN \parallel DC$), deci $\frac{LM}{DC} = \frac{FN}{DC}$, de unde $[LM] \equiv [FN]$. Drept urmare, $[LM] \equiv [MF] \equiv [FN]$.

19. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ în care $AB = 10$ cm, $BC = BD = 15$ cm și $CD = 20$ cm. Fie E intersecția bisectoarei unghiului ABC cu dreapta AC și F intersecția bisectoarei unghiului ABD cu dreapta AD. Aflați distanța EF.

Soluție



Întrucât (în triunghiul ABC) $[BE$ este bisectoarea unghiului ABC, rezultă că $\frac{EA}{EC} = \frac{BA}{BC}$, de unde $\frac{EA}{EC} = \frac{2}{3}$. Deoarece $[BF$ este bisectoarea unghiului ABD, rezultă că $\frac{FA}{FD} = \frac{BA}{BD}$, ceea ce conduce la $\frac{FA}{FD} = \frac{2}{3}$. Drept urmare, $\frac{EA}{EC} = \frac{FA}{FD}$, de unde $EF \parallel CD$. Deducem că $\triangle AEF \sim \triangle ACD$, ceea ce implică $\frac{EF}{CD} = \frac{AE}{AC}$. Cum $\frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}$, rezultă că $\frac{AE}{AC} = \frac{2}{5}$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $\frac{EF}{20} = \frac{2}{5}$ și, deci, $EF = 8$ cm.

20. Se consideră triunghiurile ABC și DEF. Arătați că, dacă $m(\hat{A}) = m(\hat{D}) = 70°$, $m(\hat{B}) = 48°$ și $m(\hat{F}) = 62°$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Soluție

Deoarece $m(\hat{E}) = 180° - [m(\hat{D}) + m(\hat{F})] = 48°$, iar $m(\hat{B}) = 48°$, rezultă că $\hat{B} \equiv \hat{E}$. Ținând seama și de faptul că $\hat{A} \equiv \hat{D}$, deducem că $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

21. Fie triunghiurile ABC și $A'B'C'$, iar D intersecția bisectoarei unghiului BAC cu latura BC și D' intersecția bisectoarei unghiului $B'A'C'$ cu latura $B'C'$. Arătați că, dacă $\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Soluție

Întrucât $\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$, rezultă că $\widehat{ABD} \equiv \widehat{A'B'D'}$ și $\widehat{BAD} \equiv \widehat{B'A'D'}$. Remarcând și faptul că $m(\widehat{BAC}) = 2m(\widehat{BAD})$, iar $m(\widehat{B'A'C'}) = 2m(\widehat{B'A'D'})$ deducem că $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$. Drept urmare, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$ și $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$, ceea ce implică $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

22. Se consideră triunghiurile ascuțitunghice ABC și $A'B'C'$. Fie $AD \perp BC$, $A'D' \perp B'C'$ ($D \in BC$, $D' \in B'C'$), iar E intersecția bisectoarei unghiului BAC cu latura BC și E' intersecția bisectoarei unghiului $B'A'C'$ cu latura $B'C'$. Arătați că, dacă $\widehat{BAD} \equiv \widehat{B'A'D'}$ și $\widehat{AEB} \equiv \widehat{A'E'B'}$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Soluție

Deoarece $m(\widehat{ABD}) = 90° - m(\widehat{BAD})$, $m(\widehat{A'B'D'}) = 90° - m(\widehat{B'A'D'})$ și $\widehat{BAD} \equiv \widehat{B'A'D'}$, rezultă că $\widehat{ABD} \equiv \widehat{A'B'D'}$, ceea ce este totuna cu $\widehat{ABE} \equiv \widehat{A'B'E'}$. Remarcând și

Scanned with OKEN Scanner

faptul că $m(\widehat{BAE}) = 180^\circ - [m(\widehat{ABE}) + m(\widehat{AEB})]$, $m(\widehat{B'A'E'}) = 180^\circ - [m(\widehat{A'B'E'}) + m(\widehat{A'E'B'})]$, iar $\widehat{AEB} \equiv \widehat{A'E'B'}$, deducem că $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{B'A'E'})$. Totodată, $m(\widehat{BAC}) = 2m(\widehat{BAE})$ și $m(\widehat{B'A'C'}) = 2m(\widehat{B'A'E'})$, deci $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$. Cum $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$ și $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$, conchidem că $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

23. Se consideră triunghiul ABC în care $AB = 8$ cm, $BC = 20$ cm și $CA = 16$ cm. Fie punctul $D \in (AC)$ astfel încât $\widehat{ABD} \equiv \widehat{ACB}$. Aflați P_{BCD}.

Soluție

Se arată cu ușurință că $D \in (AC)$.

Întrucât $\widehat{BAD} \equiv \widehat{CAB}$ și $\widehat{ABD} \equiv \widehat{ACB}$, rezultă că $\Delta ABD \sim \Delta ACB$, de unde $\frac{AD}{AB} = \frac{BD}{CB} = \frac{AB}{AC}$. Prin urmare, $\frac{AD}{8} = \frac{BD}{20} = \frac{1}{2}$, ceea ce implică $AD = 4$ cm și $BD = 10$ cm. Cum $DC = AC - AD$, rezultă că $DC = 12$ cm. Ca urmare a celor stabilite anterior, $P_{BCD} = 42$ cm.

24. Se consideră triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) în care $m(\hat{A}) = 36^\circ$. Fie D intersecția bisectoarei unghiului ABC cu latura AC. Arătați că $AB \cdot CD = BC^2$.

Soluție

Deoarece $\hat{B} \equiv \hat{C}$ (căci $[AB] \equiv [AC]$), rezultă că $m(\hat{B}) = [180^\circ - m(\hat{A})] : 2 = 72^\circ$, ceea ce implică $m(\widehat{DBC}) = 36^\circ$ (fiindcă $m(\widehat{DBC}) = m(\hat{B}) : 2$) și, deci, $\widehat{BAC} \equiv \widehat{DBC}$. Ținând seama și de faptul că $\widehat{ACB} \equiv \widehat{BCD}$, deducem că $\Delta ACB \sim \Delta BCD$, de unde $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{DC}$. Cum $[BD] \equiv [BC]$ (căci $m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{BCD}) = 72^\circ$ implică $\widehat{BDC} \equiv \widehat{BCD}$), conchidem că $AB \cdot CD = BC^2$.

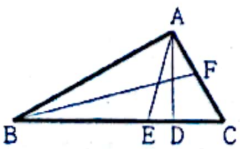
25. Fie G centrul de greutate al triunghiului dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90^\circ$) și E intersecția paralelei prin G la AC cu latura AB. Arătați că $EB = 2EA$.

Soluție

Fie D mijlocul lui $[BC]$. Atunci, $G \in (AD)$ și $AG = \frac{2AD}{3}$. Cum $2AD = BC$ (căci $m(\hat{A}) = 90^\circ$ și $[DB] \equiv [DC]$), rezultă că $AG = \frac{BC}{3}$. Din faptul că $\widehat{AGE} \equiv \widehat{DAC}$ (fiindcă $GE \parallel AC$), iar $\widehat{DAC} \equiv \widehat{DCA}$ (căci $[DA] \equiv [DC]$), deducem că $\widehat{AGE} \equiv \widehat{DCA}$, ceea ce este totuna cu $\widehat{AGE} \equiv \widehat{BCA}$. Totodată, $\widehat{AEG} \equiv \widehat{BAC}$. Drept urmare, $\Delta AEG \sim \Delta BAC$, de unde $\frac{AE}{BA} = \frac{AG}{BC}$. Ținând seama de cele stabilite anterior, deducem că $\frac{AE}{AB} = \frac{1}{3}$, ceea ce conduce la $\frac{AE}{BE} = \frac{1}{2}$ și, deci, $BE = 2AE$.

26. Se consideră triunghiul ABC în care $m(\hat{A}) = 90^\circ$ și $m(\hat{B}) = 30^\circ$. Fie E piciorul bisectoarei unghiului BAC și F piciorul bisectoarei unghiului CBA. Arătați că $BF = 2AE$.

Soluție



Fie D piciorul perpendicularei din A pe BC. Deoarece $m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{DAB}) - m(\widehat{EAB})$ (căci $m(\hat{B}) < m(\hat{C})$ implică $D \in (EC)$), iar $m(\widehat{DAB}) = 60^\circ$ (fiindcă $m(\widehat{ABD}) = 30^\circ$) și $m(\widehat{EAB}) = 45^\circ$ (căci $[AE$ este bisectoarea unghiului BAC), rezultă că $m(\widehat{DAE}) = 15^\circ$. Totodată, $m(\widehat{ABF}) = 15^\circ$ (fiindcă $[BF$ este

Scanned with OKEN Scanner

bisectoarea unghiului ABC), deci $\widehat{ABF} \equiv \widehat{DAE}$. Remarcând și faptul că triunghiurile ABF și DAE sunt dreptunghice, deducem că $\Delta ABF \sim \Delta DAE$, ceea ce implică $\frac{BF}{AE} = \frac{AB}{DA}$. Cum $DA = \frac{AB}{2}$ (căci $m(\widehat{ADB}) = 90°$ și $m(\widehat{ABD}) = 30°$), conchidem că $\frac{BF}{AE} = 2$, deci $BF = 2AE$.

27. Se consideră triunghiurile ABC și DEF. Arătați că, dacă $AB = 4$ cm, $AC = DE = 6$ cm și $DF = 9$ cm, iar $\hat{A} \equiv \hat{D}$, atunci $\hat{B} \equiv \hat{E}$ și $\hat{C} \equiv \hat{F}$.

Soluție

Întrucât $\frac{AB}{DE} = \frac{2}{3}$ și $\frac{AC}{DF} = \frac{2}{3}$, rezultă că $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$. Remarcând și faptul că $\widehat{BAC} \equiv \widehat{EDF}$, deducem că $\Delta ABC \sim \Delta DEF$. Prin urmare, $\hat{B} \equiv \hat{E}$ și $\hat{C} \equiv \hat{F}$.

28. Se consideră triunghiurile ABC și $A'B'C'$. Fie M mijlocul lui $[BC]$ și M' mijlocul lui $[B'C']$. Arătați că, dacă $\widehat{BAM} \equiv \widehat{B'A'M'}$ și $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AM}{A'M'}$, atunci $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Soluție

Deoarece $\widehat{BAM} \equiv \widehat{B'A'M'}$ și $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AM}{A'M'}$, rezultă că $\Delta ABM \sim \Delta A'B'M'$, de unde $\widehat{ABM} \equiv \widehat{A'B'M'}$ și $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BM}{B'M'}$. Totodată, $\frac{BM}{B'M'} = \frac{BC}{B'C'}$ (căci $BC = 2BM$ și $B'C' = 2B'M'$), deci $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$. Remarcând și faptul că $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$ (fiindcă $\widehat{ABM} \equiv \widehat{A'B'M'}$), conchidem că $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

29. Se consideră triunghiurile ascuțitunghice ABC și $A'B'C'$ în care $AB < AC$ și $A'B' < A'C'$. Fie $AD \perp BC$, $A'D' \perp B'C'$ ($D \in BC$, $D' \in B'C'$), M mijlocul lui $[BC]$ și M' mijlocul lui $[B'C']$. Arătați că, dacă $\frac{AD}{A'D'} = \frac{BD}{B'D'} = \frac{DM}{D'M'}$, atunci $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Soluție

Întrucât $\widehat{ADB} \equiv \widehat{A'D'B'}$ și $\frac{AD}{A'D'} = \frac{BD}{B'D'}$, rezultă că $\Delta ABD \sim \Delta A'B'D'$, de unde $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AD}{A'D'}$ și $\widehat{ABD} \equiv \widehat{A'B'D'}$. Din șirul de rapoarte egale din enunțul problemei deducem că $\frac{AD}{A'D'} = \frac{BD + DM}{B'D' + D'M'}$. Cum $BD + DM = BM = \frac{BC}{2}$ (căci $AB < AC$ implică $D \in (BM)$), iar $B'D' + D'M' = \frac{B'C'}{2}$, rezultă că $\frac{AD}{A'D'} = \frac{BC}{B'C'}$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$ și $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$, deci $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

30. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90°$). Fie $D \in (AB)$ astfel încât $AD \cdot AB = AC^2$, iar E intersecția perpendicularei din D pe BC cu dreapta AC. Arătați că $[DE] \equiv [DC]$.

Soluție

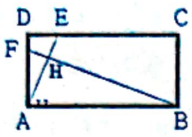
Întrucât $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$ și $\widehat{CAD} \equiv \widehat{BAC}$, rezultă că $\Delta ACD \sim \Delta ABC$, de unde $\widehat{ACD} \equiv \widehat{ABC}$. Ținând seama și de faptul că $\widehat{ABC} \equiv \widehat{AED}$ (unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare), conchidem că

Scanned with OKEN Scanner

$\widehat{ACD} \equiv \widehat{AED}$, deci $[DE] \equiv [DC]$.

31. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ în care $AB = 2BC$. Fie punctele $E \in (CD)$ şi $F \in (DA)$ astfel încât $AF = 2DE$. Arătaţi că $AE \perp BF$.

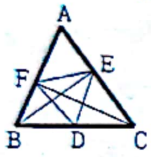
Soluţie



Deoarece $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$ (căci $AB = 2BC$ şi $BC = AD$), iar $\frac{DE}{AF} = \frac{1}{2}$, rezultă că $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{AF}$, ceea ce conduce la $\frac{DA}{DE} = \frac{AB}{AF}$. Ţinând seama şi de faptul că $\widehat{ADE} \equiv \widehat{BAF}$, deducem că $\Delta DAE \sim \Delta ABF$. Drept urmare, $\widehat{DAE} \equiv \widehat{ABF}$. Cum $m(\widehat{DAE}) + m(\widehat{BAE}) = 90°$, rezultă că $m(\widehat{ABF}) + m(\widehat{BAE}) = 90°$ sau $m(\widehat{ABH}) + m(\widehat{BAH}) = 90°$ ($\{H\} = AE \cap BF$), de unde $m(\widehat{AHB}) = 90°$. Deci, $AH \perp BH$, ceea ce este totuna cu $AE \perp BF$.

32. Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC în care $m(\widehat{BAC}) = 60°$. Fie D mijlocul lui $[BC]$, E piciorul perpendicularei din B pe AC şi F piciorul perpendicularei din C pe AB. Arătaţi că triunghiul DEF este echilateral.

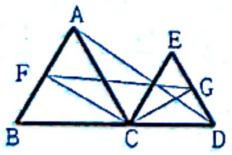
Soluţie



Întrucât (în triunghiul BCF) $m(\widehat{BFC}) = 90°$ şi $[BD] \equiv [DC]$, rezultă că $FD = \frac{BC}{2}$. Analog, $ED = \frac{BC}{2}$. Remarcând faptul că (în triunghiul ABE) $m(\widehat{AEB}) = 90°$ şi $m(\widehat{ABE}) = 30°$ (căci $m(\widehat{BAE}) = 60°$), deducem că $\frac{AE}{AB} = \frac{1}{2}$. Analog, $\frac{AF}{AC} = \frac{1}{2}$. Deci, $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$. Cum $\widehat{EAF} \equiv \widehat{BAC}$, conchidem că $\Delta AEF \sim \Delta ABC$, de unde $\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB}$, ceea ce conduce la $\frac{EF}{BC} = \frac{1}{2}$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $[ED] \equiv [FD] \equiv [EF]$ şi, deci, triunghiul DEF este echilateral.

33. Se consideră punctele coliniare $B, C, D (C \in (BD))$ şi punctele A, E situate de aceeaşi parte a dreptei BD, aşa încât triunghiurile ABC şi ECD să fie echilaterale. Fie F piciorul perpendicularei din C pe dreapta AB, iar G piciorul perpendicularei din C pe dreapta DE. Arătaţi că $AB \cdot FG = AD \cdot CF$.

Soluţie

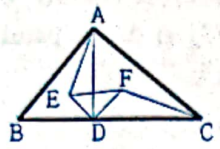


Deoarece $m(\widehat{AFC}) = m(\widehat{DGC}) = 90°$ şi $\widehat{CAF} \equiv \widehat{CDG}$, rezultă că $\Delta ACF \sim \Delta DCG$, de unde $\frac{CF}{CG} = \frac{CA}{CD}$. Întrucât $m(\widehat{FCG}) = 180° - [m(\widehat{BCF}) + m(\widehat{DCG})]$, iar $m(\widehat{BCF}) = \frac{1}{2} m(\widehat{BCA}) = 30°$ şi $m(\widehat{DCG}) = \frac{1}{2} m(\widehat{DCE}) = 30°$, deducem că $m(\widehat{FCG}) = 120°$. Totodată, $m(\widehat{ACD}) = 180° - m(\widehat{ACB}) = 120°$. Prin urmare, $\widehat{FCG} \equiv \widehat{ACD}$. Remarcând şi faptul că $\frac{CF}{CG} = \frac{CA}{CD}$, conchidem că $\Delta FCG \sim \Delta ACD$, ceea ce implică $\frac{FG}{AD} = \frac{CF}{AC}$, de unde $AB \cdot FG = AD \cdot CF$ (căci $AC = AB$).

34. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A. Fie $AD \perp BC$ ($D \in BC$) şi E, F centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ABD, respectiv ACD. Arătaţi că $\Delta DEF \sim \Delta ABC$.

Scanned with OKEN Scanner

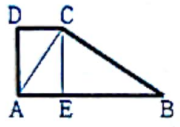
Soluție



Întrucât $[DE$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ADB}$, iar $m(\widehat{ADB}) = 90°$, rezultă că $m(\widehat{EDA}) = 45°$. Analog, $m(\widehat{FDA}) = m(\widehat{FDC}) = 45°$. Remarcând și faptul că $m(\widehat{EDF}) = m(\widehat{EDA}) + m(\widehat{FDA})$ (căci $(DA$ este inclusă în interiorul unghiului $EDF)$, deducem că $m(\widehat{EDF}) = 90°$. Deoarece $\widehat{BAD} \equiv \widehat{ACD}$ (unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare), iar $[AE$ este bisectoarea unghiului BAD și $[CF$ este bisectoarea unghiului ACD, rezultă că $\widehat{EAD} \equiv \widehat{FCD}$, ceea ce, împreună cu $\widehat{EDA} \equiv \widehat{FDC}$, arată că $\Delta AED \sim \Delta CFD$, de unde $\frac{DE}{DF} = \frac{AD}{CD}$. Pe de altă parte, $\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ (fiindcă $\Delta ABD \sim \Delta CAD$), deci $\frac{DE}{DF} = \frac{AB}{AC}$. Ținând seama și de faptul că $\widehat{EDF} \equiv \widehat{BAC}$, conchidem că $\Delta DEF \sim \Delta ABC$.

35. Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ ($AB \parallel CD$ și $DA \perp AB$) în care $AB = 13$ cm, $AD = 6$ cm și $CD = 4$ cm. Aflați P_{ABCD}.

Soluție



Fie $CE \perp AB$ ($E \in AB$). Evident, patrulaterul $ADCE$ este dreptunghi, de unde $AE = DC = 4$ cm și $CE = DA = 6$ cm. Remarcând faptul că $EB = AB - AE$, deducem că $EB = 9$ cm. Drept urmare, $\frac{EC}{EB} = \frac{2}{3}$. Cum și $\frac{DA}{DC} = \frac{2}{3}$, rezultă că $\frac{EC}{EB} = \frac{DA}{DC}$. Ținând seama și de faptul că $\widehat{CEB} \equiv \widehat{CDA}$, conchidem că $\Delta CEB \sim \Delta CDA$, de unde $\widehat{CBE} \equiv \widehat{CAD}$, ceea ce este totuna cu $\widehat{ABC} \equiv \widehat{CAD}$. Totodată, $\widehat{CAB} \equiv \widehat{DCA}$ (căci $AB \parallel DC$), deci $\Delta CAB \sim \Delta DCA$. Rezultă că $\frac{CA}{DC} = \frac{AB}{CA} = \frac{CB}{DA}$, ceea ce conduce la $\frac{CA}{4} = \frac{13}{CA} = \frac{CB}{6}$, de unde $CA = 2\sqrt{13}$ cm și $CB = 3\sqrt{13}$ cm. În consecință, $P_{ABCD} = 23 + 3\sqrt{13}$ cm.

36. Se consideră triunghiurile ABC și DEF în care $AB = 9$ cm, $BC = 6$ cm, $CA = 12$ cm, $DE = 6$ cm, $EF = 4$ cm și $FD = 8$ cm. Arătați că $\hat{A} \equiv \hat{D}$, $\hat{B} \equiv \hat{E}$ și $\hat{C} \equiv \hat{F}$.

Soluție

Întrucât $\frac{AB}{DE} = \frac{3}{2}$, $\frac{BC}{EF} = \frac{3}{2}$ și $\frac{CA}{FD} = \frac{3}{2}$, rezultă că $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$, ceea ce implică $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, de unde $\hat{A} \equiv \hat{D}$, $\hat{B} \equiv \hat{E}$ și $\hat{C} \equiv \hat{F}$.

37. Se consideră triunghiurile dreptunghice ABC și $A'B'C'$ ($m(\hat{A}) = m(\hat{A}') = 90°$). Arătați că, dacă $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$, atunci $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Soluție

Fie M mijlocul lui $[BC]$ și M' mijlocul lui $[B'C']$.

Deoarece $m(\hat{A}) = 90°$ și $[BM] \equiv [MC]$, rezultă că $AM = \frac{BC}{2}$. Analog, $A'M' = \frac{B'C'}{2}$. Prin urmare, $\frac{AM}{A'M'} = \frac{BC}{B'C'}$. Remarcăm și faptul că $\frac{BM}{B'M'} = \frac{BC}{B'C'}$. Ținând seama atât de aceste rezultate, cât și de enunț, deducem că $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AM}{A'M'} = \frac{BM}{B'M'}$, ceea ce implică $\Delta ABM \sim \Delta A'B'M'$, de unde $\widehat{ABM} \equiv \widehat{A'B'M'}$.

Cum $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$ și $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$, conchidem că $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Scanned with OKEN Scanner

38. **Se consideră triunghiurile dreptunghice neisoscele** ABC **şi** $A'B'C'$ $(m(\hat{A}) = m(\hat{A}') = 90°)$. **Fie** $AD \perp BC$, $A'D' \perp B'C'$ $(D \in BC, D' \in B'C')$, M **mijlocul lui** $[BC]$ **şi** M' **mijlocul lui** $[B'C']$. **Arătaţi că, dacă** $\frac{AD}{A'D'} = \frac{AM}{A'M'}$, **atunci** $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Soluţie

Pentru fixare, să presupunem că $AB < AC$ şi $A'B' < A'C'$.

Întrucât $\widehat{ADM} \equiv \widehat{A'D'M'}$ şi $\frac{AD}{A'D'} = \frac{AM}{A'M'}$, rezultă că $\triangle ADM \sim \triangle A'D'M'$, ceea ce implică $\widehat{AMD} \equiv \widehat{A'M'D'}$. Remarcând şi faptul că $m(\widehat{AMD}) = 2m(\widehat{ACB})$ şi $m(\widehat{A'M'D'}) \equiv 2m(\widehat{A'C'B'})$, deducem că $\widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}$. Totodată, $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$, deci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

39. **Fie triunghiurile dreptunghice neisoscele** ABC **şi** $A'B'C'$ $(m(\hat{A}) = m(\hat{A}') = 90°)$, **iar** $AD \perp BC$, $A'D' \perp B'C'$ $(D \in BC, D' \in B'C')$. **Arătaţi că, dacă** $\frac{AD}{A'D'} = \frac{BC}{B'C'}$, **atunci** $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Soluţie

Pentru fixare, să presupunem că $AB < AC$ şi $A'B' < A'C'$.

Fie M mijlocul lui $[BC]$ şi M' mijlocul lui $[B'C']$. Atunci, $AM = \frac{BC}{2}$ şi $A'M' = \frac{B'C'}{2}$, de unde $\frac{AM}{A'M'} = \frac{BC}{B'C'}$. Cum $\frac{BC}{B'C'} = \frac{AD}{A'D'}$, rezultă că $\frac{AM}{A'M'} = \frac{AD}{A'D'}$ şi, cum $m(\widehat{ADM}) = m(\widehat{A'D'M'}) = 90°$, deducem că $\triangle ADM \sim \triangle A'D'M'$, de unde $\widehat{AMD} \equiv \widehat{A'M'D'}$. Totodată, $m(\widehat{AMD}) = 2m(\widehat{ACB})$ şi $m(\widehat{A'M'D'}) = 2m(\widehat{A'C'B'})$, deci $\widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}$. Ţinând seama şi de faptul că $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$, conchidem că $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

40. **Fie triunghiurile** ABC **şi** $A'B'C'$, **iar** M **mijlocul lui** $[BC]$ **şi** M' **mijlocul lui** $[B'C']$. **Arătaţi că, dacă** $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AM}{A'M'}$, **atunci** $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Soluţie

Fie D simetricul lui A faţă de M şi D' simetricul lui A' faţă de M'. Atunci, $AD = 2AM$ şi $A'D' = 2A'M'$. Totodată, $[BD] \equiv [AC]$ şi $[B'D'] \equiv [A'C']$ (căci patrulaterele $ABDC$ şi $A'B'D'C'$ sunt paralelograme). Ţinând seama şi de egalităţile din enunţ, deducem că $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BD}{B'D'} = \frac{AD}{A'D'}$, ceea ce implică $\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$, de unde $\widehat{BAD} \equiv \widehat{B'A'D'}$ şi $\widehat{ADB} \equiv \widehat{A'D'B'}$. Cum $\widehat{ADB} \equiv \widehat{CAD}$ (fiindcă $BD \parallel AC$) şi $\widehat{A'D'B'} \equiv \widehat{C'A'D'}$ (căci $B'D' \parallel A'C'$), rezultă că $\widehat{CAD} \equiv \widehat{C'A'D'}$. Remarcând şi faptul că $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{CAD})$, iar $m(\widehat{B'A'C'}) = m(\widehat{B'A'D'}) + m(\widehat{C'A'D'})$, deducem că $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$, ceea ce, împreună cu $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, conduce la $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

41. **Fie** G **centrul de greutate al triunghiului** ABC **şi** G' **centrul de greutate al triunghiului** $A'B'C'$. **Arătaţi că, dacă** $\triangle GBC \sim \triangle G'B'C'$, **atunci** $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Soluţie

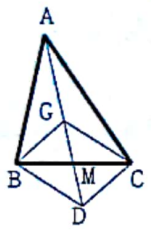
Fie E mijlocul lui $[AC]$, F mijlocul lui $[AB]$, E' mijlocul lui $[A'C']$ şi

Scanned with OKEN Scanner

F' mijlocul lui $[A'B']$. Atunci, $G \in (BE)$, $\frac{BG}{BE} = \frac{2}{3}$ și $G' \in (B'E')$, $\frac{B'G'}{B'E'} = \frac{2}{3}$, de unde $\frac{BG}{BE} = \frac{B'G'}{B'E'}$, ceea ce este totuna cu $\frac{BG}{B'G'} = \frac{BE}{B'E'}$. Analog, $\frac{CG}{C'G'} = \frac{CF}{C'F'}$. Deoarece $\Delta GBC \sim \Delta G'B'C'$, rezultă că $\widehat{GBC} \equiv \widehat{G'B'C'}$, $\widehat{GCB} \equiv \widehat{G'C'B'}$ și $\frac{BC}{B'C'} = \frac{BG}{B'G'} = \frac{CG}{C'G'}$. Egalitatea $\frac{BC}{B'C'} = \frac{BG}{B'G'}$ conduce la $\frac{BC}{B'C'} = \frac{BE}{B'E'}$. Remarcând și faptul că $\widehat{EBC} \equiv \widehat{E'B'C'}$, deducem că $\Delta EBC \sim \Delta E'B'C'$, ceea ce implică $\frac{BC}{B'C'} = \frac{CE}{C'E'}$, de unde $\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ (căci $AC = 2CE$ și $A'C' = 2C'E'$). Plecând de la egalitatea $\frac{BC}{B'C'} = \frac{CG}{C'G'}$ și repetând raționamentul anterior, deducem că $\frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{A'B'}$. Drept urmare, $\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$, de unde $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

42. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și G' centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$. Arătați că, dacă $\frac{GA}{G'A'} = \frac{GB}{G'B'} = \frac{GC}{G'C'}$, atunci $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Soluție



Fie M mijlocul lui $[BC]$, D simetricul lui G față de M, M' mijlocul lui $[B'C']$ și D' simetricul lui G' față de M'. Rezultă că $GD = 2GM$ și $G'D' = 2G'M'$. Remarcând și faptul că $GA = 2GM$ și $G'A' = 2G'M'$, deducem că $GD = GA$ și $G'D' = G'A'$. Întrucât patrulaterele $BDCG$ și $B'D'C'G'$ sunt paralelograme, rezultă că $BD = GC$, respectiv $B'D' = G'C'$. Ținând seama atât de aceste rezultate, cât și de egalitățile din enunț, deducem că $\frac{GD}{G'D'} = \frac{GB}{G'B'} = \frac{BD}{B'D'}$, ceea ce implică $\Delta GBD \sim \Delta G'B'D'$. Drept urmare, $\widehat{BGM} \equiv \widehat{B'G'M'}$. Având în vedere și faptul că $\frac{GB}{G'B'} = \frac{GM}{G'M'}$, rezultă că $\Delta BGM \sim \Delta B'G'M'$, de unde $\frac{BG}{B'G'} = \frac{BM}{B'M'}$, ceea ce conduce la $\frac{GB}{G'B'} = \frac{BC}{B'C'}$. Folosind atât simetricul lui G față de mijlocul lui $[CA]$, cât și simetricul lui G' față de mijlocul lui $[C'A']$ și repetând raționamentul anterior, deducem că $\frac{GC}{G'C'} = \frac{CA}{C'A'}$. Analog, $\frac{GA}{G'A'} = \frac{AB}{A'B'}$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$, ceea ce arată că $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

43. Fie D un punct situat în interiorul triunghiului ABC. Paralela prin D la BC intersectează (AB) în K și (CA) în L, paralela prin D la CA intersectează (BC) în M și (AB) în N, iar paralela prin D la AB intersectează (CA) în P și (BC) în Q. Arătați că $\frac{KL}{BC} + \frac{MN}{CA} + \frac{PQ}{AB} = 2$.

O.M., etapa locală, Dolj, 2001

Soluție

Deoarece $\Delta AKL \sim \Delta ABC$ (căci $KL \parallel BC$) și $\Delta BMN \sim \Delta BCA$ (fiindcă $MN \parallel CA$), rezultă că $\frac{KL}{BC} = \frac{AK}{AB}$, respectiv $\frac{MN}{CA} = \frac{BN}{BA}$, de unde $\frac{KL}{BC} + \frac{MN}{CA} = \frac{AK + BN}{AB}$. Adunând la ambii membri ai ultimei egalități

Scanned with OKEN Scanner

raportul $\frac{PQ}{AB}$, obținem $\frac{KL}{BC}+\frac{MN}{CA}+\frac{PQ}{AB}=\frac{AK+BN+PQ}{AB}$. Remarcând și faptul că $AK+BN+PQ=AK+BN+DP+DQ=AK+BN+NA+KB=(AK+KB)+(BN+NA)=2AB$ (căci patrulaterele $ANDP$ și $BKDQ$ sunt paralelograme), deducem egalitatea pe care trebuia să o demonstrăm.

44. Fie triunghiul isoscel ABC ($[AB]\equiv[AC]$) și D intersecția bisectoarei unghiului ABC cu latura AC. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului, știind că $BC^2=AB\cdot CD$.

O.M., etapa locală, Iași, 2001

Soluție

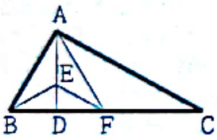
Întrucât $\frac{AD}{CD}=\frac{AB}{BC}$ (căci $\widehat{ABD}\equiv\widehat{CBD}$), rezultă că $AD\cdot BC=AB\cdot CD$, ceea ce, împreună cu $BC^2=AB\cdot CD$, conduce la $AD\cdot BC=BC^2$, de unde $[AD]\equiv[BC]$. Remarcând faptul că $\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{CD}$, iar $\widehat{ABC}\equiv\widehat{BCD}$, deducem că $\Delta ABC\sim\Delta BCD$, ceea ce implică $\widehat{BAC}\equiv\widehat{CBD}$ și $\widehat{ACB}\equiv\widehat{BDC}$. Cum $\widehat{ACB}\equiv\widehat{BDC}$ este totuna cu $\widehat{DCB}\equiv\widehat{BDC}$, rezultă că $[BD]\equiv[BC]$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $[AD]\equiv[BD]$, de unde $\widehat{ABD}\equiv\widehat{DAB}$, ceea ce implică $\widehat{ABD}\equiv\widehat{CBD}$ și, deci, $m(\widehat{ABC})=m(\widehat{ACB})=2m(\widehat{BAC})$. Cum $m(\widehat{BAC})+m(\widehat{ABC})+m(\widehat{ACB})=180°$, conchidem că $5m(\widehat{BAC})=180°$, ceea ce conduce la $m(\widehat{BAC})=36°$, iar $m(\widehat{ABC})=m(\widehat{ACB})=72°$.

45. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A})=90°$). Fie $AD\perp BC$ ($D\in BC$), E intersecția bisectoarei unghiului ABD cu AD și F intersecția bisectoarei unghiului CAD cu CD. Arătați că:

a) $EF\parallel AC$;

b) $3EF=AC$ dacă și numai dacă $m(\hat{C})=30°$.

Soluție



a) Deoarece $[BE$ este bisectoarea unghiului ABD, iar $[AF$ este bisectoarea unghiului CAD, rezultă că $\frac{ED}{EA}=\frac{BD}{BA}$, respectiv $\frac{FD}{FC}=\frac{AD}{AC}$. Ținând seama și de faptul că $\frac{BD}{BA}=\frac{AD}{AC}$ (căci $\Delta ABD\sim\Delta CAD$), deducem că $\frac{ED}{EA}=\frac{FD}{FC}$, ceea ce implică $EF\parallel AC$.

b) Întrucât $EF\parallel AC$, rezultă că $\Delta DEF\sim\Delta DAC$, de unde $\frac{EF}{AC}=\frac{DF}{DC}$.

Să demonstrăm implicația: dacă $m(\hat{C})=30°$, atunci $3EF=AC$.

Din faptul că $m(\widehat{ADC})=90°$ și $m(\widehat{ACD})=30°$ deducem că $\frac{AD}{AC}=\frac{1}{2}$, de unde $\frac{FD}{FC}=\frac{1}{2}$, ceea ce conduce la $\frac{FD}{DC}=\frac{1}{3}$. Drept urmare, $\frac{EF}{AC}=\frac{1}{3}$ și, deci, $3EF=AC$.

Să demonstrăm implicația: dacă $3EF=AC$, atunci $m(\hat{C})=30°$.

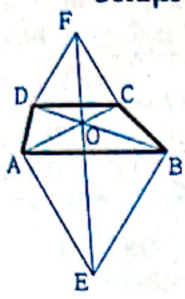
Cum $3EF=AC$, rezultă că $\frac{EF}{AC}=\frac{1}{3}$, de unde $\frac{DF}{DC}=\frac{1}{3}$, ceea ce implică $\frac{FD}{FC}=\frac{1}{2}$.

Prin urmare, $\frac{AD}{AC}=\frac{1}{2}$, de unde $AD=\frac{AC}{2}$. Remarcând și faptul că $m(\widehat{ADC})=90°$, conchidem că $m(\widehat{ACD})=30°$ și, deci, $m(\hat{C})=30°$.

46. Se consideră trapezul $ABCD$ ($AB\parallel CD$) și triunghiurile echilaterale ABE, CDF astfel încât trapezul și cele două triunghiuri să nu aibă puncte interioare comune. Fie $\{O\}=AC\cap BD$. Arătați că punctele E, O și F sunt coliniare.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție



Deoarece $\frac{OA}{OC}=\frac{AB}{CD}$ (căci $\Delta OAB\sim\Delta OCD$) și $AB=AE$ (fiindcă triunghiul ABE este echilateral), iar $CD=CF$ (căci triunghiul CDF este echilateral), rezultă că $\frac{OA}{OC}=\frac{AE}{CF}$. Remarcând și faptul că $\widehat{OAE}\equiv\widehat{OCF}$ (fiindcă $m(\widehat{OAE})=m(\widehat{OAB})+60°$, $m(\widehat{OCF})=m(\widehat{OCD})+60°$, iar $\widehat{OAB}\equiv\widehat{OCD}$), deducem că $\Delta OAE\sim\Delta OCF$. Prin urmare, $\widehat{AOE}\equiv\widehat{COF}$. Ținând seama și de faptul că semidreptele OE și OF sunt de o parte și de alta a dreptei AC, conchidem că $[OE$ și $[OF$ sunt semidrepte opuse, deci punctele E, O și F sunt coliniare.

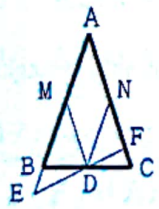
47. Fie triunghiul ABC, D intersecția bisectoarei unghiului BAC cu latura BC și E intersecția mediatoarei segmentului AD cu latura AC. Arătați că $\frac{1}{DE}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$.

Soluție

Fie F mijlocul lui $[AD]$; rezultă că $EF\perp AD$. Prin urmare, $m(\widehat{FEA})=90°-m(\widehat{FAE})$, de unde $2m(\widehat{FEA})=180°-2m(\widehat{FAE})$, ceea ce conduce la $m(\widehat{DEA})=180°-m(\widehat{BAC})$ (căci $\widehat{AEF}\equiv\widehat{DEF}$ și $\widehat{FAE}\equiv\widehat{BAD}$). Remarcând și faptul că $m(\widehat{DEC})=180°-m(\widehat{DEA})$, deducem că $\widehat{DEC}\equiv\widehat{BAC}$, de unde $DE\parallel AB$. Rezultă că $\Delta CDE\sim\Delta CBA$, ceea ce implică $\frac{DE}{AB}=\frac{CE}{CA}$. Cum $CE=CA-EA$, iar $EA=DE$ (fiindcă E este un punct situat pe mediatoarea segmentului AD), conchidem că $\frac{DE}{AB}=1-\frac{DE}{AC}$, de unde $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{DE}$.

48. Fie triunghiul isoscel ABC ($[AB]\equiv[AC]$) și $AD\perp BC$ ($D\in BC$). O dreaptă oarecare ce trece prin D intersectează AB în E și AC în F. Arătați că $\frac{1}{AE}+\frac{1}{AF}=\frac{2}{AB}$.

Soluție



Fie M mijlocul lui $[AB]$ și N mijlocul lui $[AC]$. Întrucât $[AB]\equiv[AC]$ și $AD\perp BC$, rezultă că $[BD]\equiv[DC]$. Prin urmare, $[DM]$ și $[DN]$ sunt linii mijlocii în triunghiul ABC, de unde $DM\parallel AC$, $DM=\frac{AC}{2}$ și $DN\parallel AB$, $DN=\frac{AB}{2}$. Cum $DN\parallel AE$ și $DM\parallel AF$, rezultă că $\Delta FDN\sim\Delta FEA$, respectiv $\Delta EDM\sim\Delta EFA$, de unde $\frac{DN}{EA}=\frac{FD}{FE}$, respectiv $\frac{DM}{FA}=\frac{ED}{EF}$. Adunând ultimele două egalități membru cu membru, obținem $\frac{DN}{AE}+\frac{DM}{AF}=\frac{FD+ED}{EF}=1$. Ținând seama de cele stabilite anterior, ultima egalitate conduce la $\frac{AB}{2}\left(\frac{1}{AE}+\frac{1}{AF}\right)=1$, de unde $\frac{1}{AE}+\frac{1}{AF}=\frac{2}{AB}$.

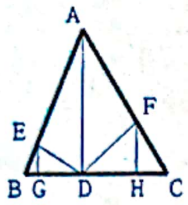
49. În triunghiul ascuțitunghic ABC se duc $AD\perp BC$, $DE\perp AB$, $DF\perp AC$, $EG\perp BC$ și $FH\perp BC$ ($D, H, G\in BC$, $E\in AB$ și $F\in AC$). Arătați că:

a) $AE\cdot DE\cdot DH=AF\cdot DF\cdot DG$;

b) $\frac{EG}{FH}=\left(\frac{DE}{DF}\right)^2$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție

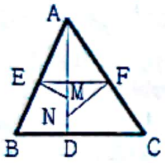


a) Deoarece $m(\widehat{AED}) = m(\widehat{DGE}) = 90°$ și $\widehat{EAD} \equiv \widehat{GDE}$ (căci $AE \perp DE$ și $AD \perp DG$), rezultă că $\Delta AED \sim \Delta DGE$. Analog, arătăm că $\Delta AFD \sim \Delta DHF$. Din cele stabilite anterior deducem că $\frac{AE}{AD} = \frac{DG}{DE}$ și $\frac{AD}{AF} = \frac{DF}{DH}$. Înmulțind aceste egalități membru cu membru, obținem $\frac{AE}{AF} = \frac{DG}{DE} \cdot \frac{DF}{DH}$, ceea ce conduce la $AE \cdot DE \cdot DH = AF \cdot DF \cdot DG$.

b) Întrucât $\frac{AD}{DE} = \frac{DE}{EG}$ (fiindcă $\Delta AED \sim \Delta DGE$) și $\frac{DF}{AD} = \frac{FH}{DF}$ (căci $\Delta AFD \sim \Delta DHF$), rezultă că $\frac{AD}{DE} \cdot \frac{DF}{AD} = \frac{DE}{EG} \cdot \frac{FH}{DF}$, de unde $\frac{EG}{FH} = \left(\frac{DE}{DF}\right)^2$.

50. Fie tringhiul ascuțitunghic ABC și $AD \perp BC (D \in BC)$. O paralelă la BC intersectează (AB) în E și (AC) în F, iar perpendiculara în E pe AB și perpendiculara în F pe AC intersectează AD în M, respectiv N. Arătați că $\frac{AM}{AN} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.

Soluție



Întrucât $\Delta AEM \sim \Delta ADB$ (căci $m(\widehat{AEM}) = m(\widehat{ADB}) = 90°$ și $\widehat{MAE} \equiv \widehat{BAD}$), iar $\Delta AFN \sim \Delta ADC$, rezultă că $\frac{AE}{AD} = \frac{AM}{AB}$, respectiv $\frac{AF}{AD} = \frac{AN}{AC}$. Împărțind aceste egalități membru cu membru, obținem $\frac{AE}{AF} = \frac{AM}{AN} \cdot \frac{AC}{AB}$, de unde $\frac{AM}{AN} = \frac{AE}{AF} \cdot \frac{AB}{AC}$. Remarcând și faptul că $\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$ (fiindcă $EF \parallel BC$), deducem egalitatea pe care trebuia să o demonstrăm.

PROBLEME PROPUSE

1. Laturile unui triunghi au lungimea de 6 cm, 9 cm, respectiv 12 cm. Aflați perimetrul altui triunghi, asemenea cu primul, știind că lungimea celei mai mare laturi ale sale este de 8 cm.

2. Laturile unui triunghi au lungimea de 9 cm, 12 cm, respectiv 18 cm. Aflați lungimea fiecăreia dintre laturile altui triunghi asemenea cu primul, știind că raportul perimetrelor lor este 1,5.

3. Fie triunghiul ABC și punctele $E \in (AB), F \in (AC)$. Arătați că, dacă $\Delta AEF \sim \Delta ABC$, atunci $EF \parallel BC$. Dacă $\Delta AEF \sim \Delta ACB$, mai rămâne valabilă concluzia că $EF \parallel BC$?

4. Fie trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ și $\{O\} = AC \cap BD$. Aflați lungimea fiecăruia dintre segmentele BD și CD, știind că $AB = 12$ cm, $OA = 6$ cm, $OC = 3$ cm și $OD = 4$ cm.

5. Se consideră trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ în care $AB = 12$ cm, $BC = 6$ cm, $CD = 4$ cm și $DA = 8$ cm. Fie $\{E\} = AD \cap BC$. Aflați perimetrul triunghiului CDE.

6. Se consideră triunghiul ABC în care $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm și $CA = 7$ cm. Fie punctele $E \in (AB)$ și $F \in (AC)$ astfel încât $EF \parallel BC$ și, totodată, $P_{AEF} = P_{BCFE}$. Calculați lungimea segmentului EF.

Scanned with OKEN Scanner

7. Fie M un punct oarecare pe diagonala AC a patrulaterului convex $ABCD$ ($M \neq A$ și $M \neq C$), iar E intersecția paralelei prin M la BC cu latura AB și F intersecția paralelei prin M la CD cu latura DA. Arătați că $\frac{ME}{BC} + \frac{FD}{AD} = 1$.

8. Se consideră trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$) în care $AB = 14$ cm și $CD = 6$ cm. Fie punctele $E \in (AD)$ și $F \in (BC)$ astfel încât $EF \parallel AB$ și $\frac{EA}{ED} = \frac{3}{5}$. Aflați lungimea segmentului EF.

9. Se consideră trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$) în care $AB = 15$ cm și $CD = 10$ cm. Fie $\{O\} = AC \cap BD$, E intersecția paralelei prin O la AD cu AB și F intersecția paralelei prin O la BC cu AB. Aflați distanța EF.

10. Fie paralelogramul $ABCD$, E mijlocul lui $[BC]$, F mijlocul lui $[CD]$ și $\{M\} = AE \cap BF$. Arătați că $MA = 4ME$.

11. Fie triunghiul ABC, D mijlocul lui $[BC]$ și E un punct pe (AB). Paralela prin E la AD intersectează AC în F. Arătați că $\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$.

12. Se consideră trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$) în care $AB = 2CD$. Fie E mijlocul lui $[AB]$, F mijlocul lui $[CD]$, $\{K\} = AF \cap DE$ și $\{L\} = BF \cap CE$. Arătați că $LK \parallel AB$.

13. Fie triunghiul ABC, M mijlocul lui $[BC]$, D mijlocul lui $[AM]$, $\{E\} = BD \cap AC$ și $\{F\} = CD \cap AB$. Arătați că:
a) $EF \parallel BC$; b) $EF = \frac{BC}{3}$.

14. Fie triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), punctul $D \in (BC)$, $DE \perp AC$ și $EF \perp AB$ ($E \in AC$ și $F \in AB$). Arătați că $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot EA$.
Indicație. Ducem $BK \perp AC$ și $CL \perp AB$. În final, se folosește faptul că $BK = CL$.

15. Arătați că oricare două triunghiuri echilaterale sunt asemenea.

16. Arătați că oricare două triunghiuri dreptunghice isoscele sunt asemenea.

17. Se consideră triunghiurile ABC și DEF. Arătați că, dacă $m(\hat{A}) = 38°$, $m(\hat{B}) = m(\hat{E}) = 67°$ și $m(\hat{F}) = 75°$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

18. Fie triunghiurile ABC și $A'B'C'$, iar E intersecția bisectoarei unghiului BAC cu latura BC și E' intersecția bisectoarei unghiului $B'A'C'$ cu latura $B'C'$. Arătați că, dacă $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$ și $\widehat{AEC} \equiv \widehat{A'E'C'}$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

19. Fie A un punct pe bisectoarea unghiului xOy ($A \neq O$). Perpendiculara în A pe OA intersectează Ox în B, iar perpendiculara din A pe Oy intersectează Oy în C. Arătați că $OA^2 = OB \cdot OC$.

20. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90°$) și punctele $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ astfel încât $DE \parallel BC$. Fie $DF \perp BC$ și $EG \perp BC$ ($F, G \in BC$). Arătați că, dacă $[DE] \equiv [DF]$, atunci $FG^2 = BF \cdot CG$.

Scanned with OKEN Scanner

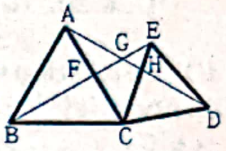
21. Fie dreptunghiul $ABCD$ și E intersecția perpendicularei din C pe diagonala BD cu latura AB. Arătați că $AB \cdot BE = BC^2$.

22. Fie dreptunghiul $ABCD$, punctul $E \in (CD)$ și $\{F\} = AE \cap BC$. Arătați că, dacă $AB^2 = BF \cdot DE$, atunci patrulaterul $ABCD$ este pătrat.

23. Se consideră trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ în care $AC \perp BD$. Fie $\{O\} = AC \cap BD$, $OE \perp AB$ $(E \in AB)$ și $OF \perp CD$ $(F \in CD)$. Arătați că $AE \cdot DF = BE \cdot CF$.

24. Fie H ortocentrul triunghiului ABC și H' ortocentrul triunghiului $A'B'C'$. Arătați că, dacă $\triangle HBC \sim \triangle H'B'C'$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

25. În figura alăturată, se consideră triunghiurile echilaterale ABC și CDE. Fie $\{F\} = AC \cap BE$, $\{G\} = AD \cap BE$ și $\{H\} = AD \cap CE$. Arătați că $\triangle FAG \sim \triangle FBC$ și $\triangle HEG \sim \triangle HDC$.



26. Se consideră triunghiul ABC în care $m(\hat{A}) > 90°$. Fie punctele $E, F \in (BC)$ astfel încât $\widehat{BAE} \equiv \widehat{ACB}$ și $\widehat{CAF} \equiv \widehat{ABC}$. Arătați că: a) $[AE] \equiv [AF]$; b) $AB^2 = BC \cdot BE$, $AC^2 = BC \cdot CF$ și $AE^2 = BE \cdot CF$.

27. Se consideră triunghiurile ABC și DEF. Arătați că, dacă $\hat{B} \equiv \hat{E}$ și $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm, $DE = 12$ cm, $EF = 9$ cm, atunci $2DF = 3AC$.

28. Fie unghiul xOy și punctele $A, B \in (Ox$, $C, D \in (Oy$ astfel încât $OA = 4$ cm, $OB = 20$ cm, $OC = 8$ cm, $OD = 10$ cm. Arătați că $2AD = BC$.

29. Se consideră trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD, AB > CD)$ în care $AC^2 = AB \cdot CD$. Arătați că $\widehat{CAD} \equiv \widehat{ABC}$.

30. Se consideră triunghiurile dreptunghice ABC și $A'B'C'$ $(m(\hat{A}) = m(\hat{A}') = 90°)$. Fie E intersecția bisectoarei unghiului ABC cu latura AC și E' intersecția bisectoarei unghiului $A'B'C'$ cu latura $A'C'$. Arătați că, dacă $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AE}{A'E'}$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

31. Se consideră triunghiurile ABC și $A'B'C'$. Fie E intersecția bisectoarei unghiului BAC cu latura BC și E' intersecția bisectoarei unghiului $B'A'C'$ cu latura $B'C'$. Arătați că, dacă $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ și $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AE}{A'E'}$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

32. Fie triunghiurile ABC și $A'B'C'$, iar M mijlocul lui $[BC]$ și M' mijlocul lui $[B'C']$. Arătați că, dacă $\frac{AM}{A'M'} = \frac{BC}{C'B'}$ și $\widehat{AMC} \equiv \widehat{A'M'B'}$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle A'C'B'$.

33. Fie triunghiurile ABC și $A'B'C'$, iar M mijlocul lui $[BC]$ și M' mijlocul lui $[B'C']$. Arătați că, dacă $\widehat{BAM} \equiv \widehat{B'A'M'}$ și $\widehat{AMC} \equiv \widehat{A'M'C'}$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

34. Fie triunghiurile ascuțiunghice ABC și $A'B'C'$, iar $AD \perp BC$ și $A'D' \perp B'C'$ $(D \in BC$, $D' \in B'C')$. Arătați că, dacă $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AD}{A'D'}$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Scanned with OKEN Scanner

35. Se consideră triunghiurile ascuțiunghice ABC și $A'B'C'$ în care $AB < AC, A'B' < A'C'$. Fie $AD \perp BC, A'D' \perp B'C'$ $(D \in BC, D' \in B'C')$, E intersecția bisectoarei unghiului BAC cu latura BC și E' intersecția bisectoarei unghiului $B'A'C'$ cu latura $B'C'$. Arătați că, dacă $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{AE}{A'E'}$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

36. Se consideră triunghiurile ascuțiunghice ABC și $A'B'C'$ în care $AB < AC, A'B' < A'C'$. Fie $AD \perp BC, A'D' \perp B'C'$ $(D \in BC, D' \in B'C')$, M mijlocul lui $[BC]$ și M' mijlocul lui $[B'C']$. Arătați că, dacă $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{AM}{A'M'}$, atunci $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

37. Fie triunghiul ABC, D mijlocul lui $[BC]$, E mijlocul lui $[CA]$ și $\{G\} = AD \cap BE$. Arătați că, dacă $2AD = AC\sqrt{3}$, atunci $\widehat{AGE} \equiv \widehat{ACD}$.

38. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și G' centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$. Arătați că, dacă $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, atunci $\triangle GBC \sim \triangle G'B'C'$.

39. Fie triunghiul ABC și punctele $E \in (AB), F \in (AC)$, $\{G\} = BF \cap CE$. Arătați că, dacă $\frac{GE}{GC} = \frac{GF}{GB} = \frac{1}{2}$, atunci $[EA] \equiv [EB]$ și $[FA] \equiv [FC]$.

40. Fie I punctul de intersecție a bisectoarelor unghiurilor triunghiului ABC. Paralela prin I la BC intersectează AB în E și AC în F. Perpendiculara din E pe BI intersectează BC în G, iar perpendiculara din F pe CI intersectează BC în H. Arătați că $\triangle IGH \sim \triangle ABC$.

41. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC și D mijlocul laturii BC. Paralela prin G la BC intersectează AB în E și AC în F. Arătați că $m(\widehat{EDF}) = 90°$ dacă și numai dacă $[AD] \equiv [BC]$.

42. Se consideră triunghiul isoscel ABC $([AB] \equiv [AC])$. Fie D mijlocul lui $[BC]$, E piciorul perpendicularei din B pe AC, F simetricul lui D față de AC și $\{L\} = FE \cap AB$. Arătați că $\triangle DBL \sim \triangle ABC$.

43. Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$ $(AB \parallel CD$ și $DA \perp AB)$. Fie $\{O\} = AC \cap BD$ și E intersecția paralelei prin O la AB cu AD. Arătați că $[EO$ este bisectoarea unghiului BEC.

44. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care $m(\hat{A}) = 60°$. Bisectoarea unghiului BAC intersectează BC în D, iar paralelele prin D la AB și AC intersectează AC în E, respectiv AB în F. Arătați că:

a) triunghiul DEF este echilateral; b) $\frac{1}{EF} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

45. Fie pătratul $ABCD$, E un punct pe (AD) și $\{F\} = CE \cap AB$. Arătați că:

a) $AE < AF$; b) $\frac{1}{AE} - \frac{1}{AF} = \frac{1}{AB}$.

RĂSPUNSURI

1. 18 cm **2.** 6 cm, 8 cm, 12 cm **4.** $BD = 12$ cm, $CD = 6$ cm **5.** 10 cm **6.** 9 cm **8.** 11 cm **9.** 3 cm.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VIII

RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

§1. TEOREMA CATETEI. TEOREMA ÎNĂLȚIMII. TEOREMA LUI PITAGORA

PROBLEME REZOLVATE

1. **Fie triunghiul dreptunghic** $ABC\,(m(\hat{A})=90^\circ)$ **și** $AD\perp BC\,(D\in BC)$**. Aflați perimetrul triunghiului în fiecare din următoarele situații:**
   a) $BD=9$ cm **și** $CD=16$ cm;
   b) $AB=8$ cm **și** $BD=4$ cm.

Soluție

a) Deoarece $BC=BD+CD$ (căci $D\in(BC)$), rezultă că $BC=25$ cm. Remarcând și faptul că $AB^2=BD\cdot BC$, iar $AC^2=CD\cdot BC$ (căci $m(\widehat{BAC})=90^\circ$ și $D=pr_{BC}A$), deducem că $AB=15$ cm și $AC=20$ cm. Prin urmare, $P_{ABC}=60$ cm.

b) Întrucât $AB^2=BD\cdot BC$, rezultă că $BC=16$ cm, de unde $CD=12$ cm. Ținând seama și de faptul că $AC^2=CD\cdot BC$, deducem că $AC=8\sqrt{3}$ cm. În consecință, $P_{ABC}=24+8\sqrt{3}$ cm.

2. **Fie triunghiul dreptunghic** $ABC\ (m(\hat{A})=90^\circ)$, $AD\perp BC$, $DE\perp AB$ **și** $DF\perp AC$ $(D\in BC, E\in AB, F\in AC)$**. Arătați că** $\dfrac{AE}{AF}=\dfrac{AC}{AB}$.

Soluție

Întrucât (în triunghiul ABD) $m(\widehat{ADB})=90^\circ$ și $E=pr_{AB}D$, rezultă că $AD^2=AE\cdot AB$. Deoarece (în triunghiul ACD) $m(\widehat{ADC})=90^\circ$ și $F=pr_{AC}D$, rezultă că $AD^2=AF\cdot AC$. Drept urmare, $AE\cdot AB=AF\cdot AC$, de unde $\dfrac{AE}{AF}=\dfrac{AC}{AB}$.

3. **Fie triunghiul dreptunghic** $ABC\,(m(\hat{A})=90^\circ)$ **și** $AD\perp BC$**. Aflați perimetrul triunghiului, știind că** $AD=6$ cm **și** $BD=4$ cm.

Soluție

Deoarece $AD^2=BD\cdot CD$ (căci $m(\widehat{BAC})=90^\circ$ și $D=pr_{BC}A$), rezultă că $CD=9$ cm, de unde $BC=13$ cm. Totodată, $AB^2=BD\cdot BC$, iar $AC^2=CD\cdot BC$, deci $AB=2\sqrt{13}$ cm și $AC=3\sqrt{13}$ cm. Prin urmare, $P_{ABC}=13+5\sqrt{13}$ cm.

4. **Fie triunghiul dreptunghic** $ABC\ (m(\hat{A})=90^\circ)$, $AD\perp BC$, E **mijlocul lui** $[AB]$ **și** F **mijlocul lui** $[AC]$**. Aflați** P_{DEF}**, știind că** $DB=3$ cm **și** $DC=9$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție

Evident, $BC = BD + DC = 12$ cm. Întrucât $AB^2 = BD \cdot BC$ și $AC^2 = CD \cdot BC$ (căci $m(\widehat{BAC}) = 90°$ și $D = pr_{BC} A$), rezultă că $AB = 6$ cm și $AC = 6\sqrt{3}$ cm. Având în vedere că $DE = \frac{AB}{2}$ (fiindcă $m(\widehat{ADB}) = 90°$ și $[EA] \equiv [EB]$) și $DF = \frac{AC}{2}$, deducem că $DE = 3$ cm și $DF = 3\sqrt{3}$ cm. Remarcăm și faptul că $EF = \frac{BC}{2} = 6$ cm (căci $[EF]$ este linie mijlocie în triunghiul ABC). În consecință, $P_{DEF} = 9 + 3\sqrt{3}$ cm.

5. **Fie triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90°$) și $D = pr_{BC} A$. Aflați, perimetrul triunghiului, știind că $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$, iar $AD = 4{,}8$ cm.**

Soluție

Întrucât $BD \cdot CD = AD^2$, rezultă că $BD \cdot CD = 4{,}8^2$. Pe de altă parte, $\frac{BD}{CD} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{9}{16}$ (căci $AB^2 = BD \cdot BC$ și $AC^2 = CD \cdot BC$), de unde $BD = \frac{9CD}{16}$. Drept urmare, $\frac{9CD^2}{16} = 4{,}8^2$, ceea ce conduce la $CD = \frac{4}{3} \cdot 4{,}8 = 6{,}4$ cm, iar $BD = 3{,}6$ cm. Cum $BC = BD + DC$, rezultă că $BC = 10$ cm. Ținând seama de cele stabilite anterior, deducem că $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, iar $P_{ABC} = 24$ cm.

6. **Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90°$) în care $BC = 26$ cm și $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{12}$. Aflați P_{ABC}.**

Soluție

Deoarece $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{12}$, există $k \in \mathbb{R}_+^*$ astfel încât $AB = 5k$ și $AC = 12k$. Având în vedere și faptul că $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (căci $m(\hat{A}) = 90°$), deducem că $169k^2 = 676$, de unde $k = 2$. Prin urmare, $AB = 10$ cm, $AC = 24$ cm, iar $P_{ABC} = 60$ cm.

7. **Fie triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90°$) și $D = pr_{BC} A$. Aflați P_{ABC}, știind că $BC = \sqrt{13}$ cm și că $\frac{BD}{CD} = \frac{4}{9}$.**

Soluție

Întrucât $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{BD}{CD}$, rezultă că $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$, de unde $AB = 2k$ și $AC = 3k$ ($k \in \mathbb{R}_+^*$). Ținând seama și de faptul că $AB^2 + AC^2 = BC^2$, obținem $k = 1$, ceea ce implică $AB = 2$ cm și $AC = 3$ cm. Drept urmare, $P_{ABC} = 5 + \sqrt{13}$ cm.

8. **Într-un triunghi dreptunghic, suma dintre lungimea ipotenuzei și lungimea uneia din catete este de 24 cm, iar lungimea celeilalte catete este de 12 cm. Aflați lungimea ipotenuzei.**

Soluție

Fie ABC ($m(\hat{A}) = 90°$) triunghiul considerat în enunțul problemei. Pentru fixare, să luăm $AB = 12$ cm. Atunci, $BC + AC = 24$ cm. Cum $BC^2 - AC^2 = AB^2$,

Scanned with OKEN Scanner

rezultă că $(BC+AC)(BC-AC)=AB^2$, de unde $24(BC-AC)=144$, ceea ce conduce la $BC-AC=6$ cm. Deducem că $2BC=30$, deci $BC=15$ cm.

9. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A})=90°$) în care $m(\hat{C})=30°$, iar lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este de 6 cm. Aflați perimetrul triunghiului.

Soluție

Fie M mijlocul lui $[BC]$. Deoarece $BC=2AM$ (căci $m(\hat{A})=90°$ și $[MB]\equiv[MC]$), rezultă că $BC=12$ cm. Remarcând și faptul că $AB=\frac{BC}{2}$ (fiindcă $m(\hat{C})=30°$), deducem că $AB=6$ cm. Cum $AC^2=BC^2-AB^2$, rezultă că $AC=6\sqrt{3}$ cm. Deci, $P_{ABC}=18+6\sqrt{3}$ cm.

10. Fie triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A})=90°$) și $D=\underset{BC}{pr}A$. Aflați perimetrul triunghiului, știind că $AB=15$ cm și $AD=12$ cm.

Soluție

Întrucât $BD^2=AB^2-AD^2$ (căci $m(\widehat{ADB})=90°$), rezultă că $BD=9$ cm. Remarcând faptul că $AB^2=BD\cdot BC$ (fiindcă $m(\widehat{BAC})=90°$ și $D=\underset{BC}{pr}A$), deducem că $BC=25$ cm. Cum $AC^2=BC^2-AB^2$, rezultă că $AC=20$ cm. Deci, $P_{ABC}=60$ cm.

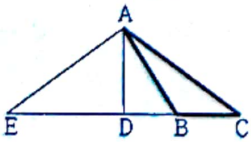
11. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ în care $AB=6\sqrt{5}$ cm și $BC=3\sqrt{5}$ cm. Perpendiculara din D pe AC intersectează AC în E și AB în F. Aflați lungimea segmentului EF.

Soluție

Deoarece $AC^2=AB^2+BC^2$, rezultă că $AC=15$ cm. Ținând seama și de faptul că $DE=\frac{AD\cdot DC}{AC}$ (căci $m(\widehat{ADC})=90°$ și $DE\perp AC$), deducem că $DE=6$ cm. Întrucât $AD^2=DE\cdot DF$ (fiindcă $m(\widehat{DAF})=90°$ și $E=\underset{DF}{pr}A$), rezultă că $DF=7{,}5$ cm. Cum $EF=DF-DE$, conchidem că $EF=1{,}5$ cm.

12. Fie triunghiul ABC și $AD\perp BC$. Arătați că, dacă $m(\hat{B})-m(\hat{C})=90°$, atunci $DA^2=DB\cdot DC$.

Soluție



Egalitatea de demonstrat ne sugerează să arătăm că AD este înălțimea corespunzătoare ipotenuzei într-un triunghi dreptunghic în care proiecția pe ipotenuză a uneia din catete este segmentul DB. Întrucât $m(\hat{B})>90°$, $m(\hat{C})<90°$ și $AD\perp BC$, rezultă că $B\in(DC)$. Fie E intersecția perpendicularei în A pe AB cu dreapta BC. Deoarece $m(\widehat{AEB})=90°-m(\widehat{ABE})=90°-(180°-m(\widehat{ABC}))=$ $=m(\widehat{ABC})-90°=m(\widehat{ACB})$, rezultă că $\widehat{AEB}\equiv\widehat{ACB}$, ceea ce este totuna cu $\widehat{AEC}\equiv\widehat{ACE}$. Remarcând și faptul că $AD\perp EC$, deducem că $[DE]\equiv[DC]$. Pe de altă parte, $DA^2=DB\cdot DE$ (căci $m(\widehat{EAB})=90°$ și $D=\underset{EB}{pr}A$), deci $DA^2=DB\cdot DC$.

13. Într-un triunghi dreptunghic, lungimea unei catete este 9 cm, iar lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este 7,2 cm. Aflați perimetrul triunghiului.

Soluție

Fie ABC ($m(\hat{A})=90°$) triunghiul considerat în enunțul problemei și $AD\perp BC$

Scanned with OKEN Scanner

$(D \in BC)$. Pentru fixare, să presupunem că $AB = 9$ cm. Deoarece $BD^2 = AB^2 - AD^2$ (căci $m(\widehat{ADB}) = 90°$), rezultă că $BD^2 = 29{,}16$, de unde $BD = 5{,}4$ cm. Remarcând și faptul că $AB^2 = BD \cdot BC$ (fiindcă $m(\widehat{BAC}) = 90°$ și $D = pr_{BC} A$), deducem că $BC = 15$ cm. Cum $CD = BC - BD$ (căci $D \in (BC)$), rezultă că $CD = 9{,}6$ cm. Având în vedere că $AC^2 = CD \cdot BC$, conchidem că $AC = 12$ cm. Ca urmare a celor stabilite anterior, $P_{ABC} = 36$ cm.

14. Aflați lungimile laturilor triunghiului dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90°$), știind că $m(\hat{B}) = 60°$ și că perimetrul triunghiului este egal cu $9 + 3\sqrt{3}$ cm.

Soluție

Fie $a = AB$. Deoarece $m(\hat{C}) = 30°$ (căci $m(\hat{C}) = 90° - m(\hat{B})$), rezultă că $BC = 2AB$, deci $BC = 2a$. Ținând seama și de faptul că $AC^2 = BC^2 - AB^2$, deducem că $AC = a\sqrt{3}$. Prin urmare, perimetrul triunghiului ABC este $a(3 + \sqrt{3})$. Cum acesta trebuie să fie egal cu $9 + 3\sqrt{3}$ cm, rezultă că $a(3 + \sqrt{3}) = 9 + 3\sqrt{3}$, de unde $a = 3$ cm. Așadar, $AB = 3$ cm, $BC = 6$ cm și $AC = 3\sqrt{3}$ cm.

15. Aflați perimetrul triunghiului dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90°$), știind că lungimile laturilor AB și BC sunt invers proporționale cu $0{,}1(6)$ și $0{,}08(3)$, iar lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este $2\sqrt{3}$ cm.

Soluție

Deoarece $0{,}1(6) \cdot AB = 0{,}08(3) \cdot BC$, iar $0{,}1(6) = \frac{1}{6}$ și $0{,}08(3) = \frac{1}{12}$, rezultă că $AB = \frac{BC}{2}$, ceea ce, împreună cu $m(\hat{A}) = 90°$, arată că $m(\hat{C}) = 30°$. Deducem imediat că $m(\widehat{ABD}) = 30°$. Cum $m(\widehat{ADB}) = 90°$, rezultă că $AB = 2BD$. Totodată, $AB^2 - BD^2 = AD^2$, deci $3BD^2 = 12$, ceea ce conduce la $BD = 2$ cm. Drept urmare, $AB = 4$ cm și $BC = 8$ cm. Remarcând și faptul că $CA = 4\sqrt{3}$ cm (căci $CA^2 = BC^2 - AB^2$), conchidem că $P_{ABC} = 12 + 4\sqrt{3}$ cm.

16. Fie triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90°$), D proiecția lui A pe BC și E mijlocul lui $[BC]$. Aflați lungimile catetelor AB și AC, știind că $AD = 24$ cm, $AE = 25$ cm și $\hat{B} > \hat{C}$.

Soluție

Întrucât $BC = 2AE$ (căci $m(\widehat{BAC}) = 90°$ și $[BE] \equiv [EC]$), rezultă că $BC = 50$ cm, de unde $BE = EC = 25$ cm. Remarcând faptul că $DE^2 = AE^2 - AD^2$ (fiindcă $m(\widehat{ADE}) = 90°$), deducem că $DE = 7$ cm. Drept urmare, $BD = 18$ cm și $DC = 32$ cm (căci $BD = BE - DE$ și $DC = DE + EC$). Ținând seama și de faptul că $AB^2 = BD \cdot BC$ și $AC^2 = CD \cdot BC$ (fiindcă $m(\widehat{BAC}) = 90°$ și $AD \perp BC$), conchidem că $AB = 30$ cm, iar $AC = 40$ cm.

17. Fie triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90°$), D mijlocul lui $[BC]$ și E intersecția bisectoarei unghiului ABC cu latura AC. Aflați P_{ABC}, știind că $BE \perp AD$ și că $AE = \sqrt{3}$ cm.

Soluție

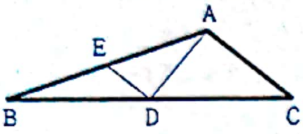
Fie $\{F\} = AD \cap BE$. Deoarece $\widehat{ABF} \equiv \widehat{DBF}$ și $BF \perp AD$, rezultă că $[BA] \equiv [BD]$.

Scanned with OKEN Scanner

Totodată, $[DA] \equiv [DB]$, deci triunghiul ABD este echilateral, de unde $m(\widehat{ABD}) = 60°$, ceea ce implică $m(\widehat{ABE}) = 30°$. Remarcând şi faptul că $m(\widehat{BAE}) = 90°$, deducem că $BE = 2AE = 2\sqrt{3}$ cm. Cum $AB^2 = BE^2 - AE^2$, rezultă că $AB = 3$ cm. Având în vedere că $BC = 2AB$ (căci $m(\widehat{BAC}) = 90°$ şi $m(\widehat{ACB}) = 30°$), iar $AC^2 = BC^2 - AB^2$, conchidem că $BC = 6$ cm şi $AC = 3\sqrt{3}$ cm. În consecinţă, $P_{ABC} = 9 + 3\sqrt{3}$ cm.

18. Fie D mijlocul laturii BC a triunghiului ABC. Calculaţi $m(\widehat{BAC})$, ştiind că $DA \perp AC$ şi $AD = \frac{AB\sqrt{3}}{4}$.

Soluţie



Fie E mijlocul lui $[AB]$. Întrucât $[DE]$ este linie mijlocie în triunghiul BAC, rezultă că $ED \parallel AC$, ceea ce implică $m(\widehat{ADE}) = 90°$ (căci $\widehat{ADE} \equiv \widehat{DAC}$ şi $m(\widehat{DAC}) = 90°$). Prin urmare, $ED^2 = EA^2 - AD^2 = \frac{AB^2}{4} - \frac{3AB^2}{16} = \frac{AB^2}{16}$, de unde $ED = \frac{AB}{4}$ şi, deci, $ED = \frac{AE}{2}$. Având în vedere şi faptul că $m(\widehat{ADE}) = 90°$, deducem că $m(\widehat{EAD}) = 30°$. Totodată, $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{DAC})$ (fiindcă $D \in (BC)$), iar $m(\widehat{DAC}) = 90°$, deci $m(\widehat{BAC}) = 120°$.

19. Aflaţi perimetrul triunghiului ABC, ştiind că $BC = 2AB$, $AC = 4\sqrt{3}$ cm şi $m(\hat{B}) = 60°$.

Soluţie

Fie M mijlocul lui $[BC]$. Rezultă că $BM = \frac{BC}{2}$, ceea ce, împreună cu $BA = \frac{BC}{2}$, conduce la $[BM] \equiv [BA]$. Remarcând şi faptul că $m(\widehat{ABM}) = 60°$, deducem că triunghiul ABM este echilateral. Drept urmare, $AM = \frac{BC}{2}$. Totodată, $[AM] \equiv [MB]$, deci $m(\widehat{BAC}) = 90°$. Rezultă că $BC^2 - AB^2 = AC^2$, de unde $3AB^2 = 48$, ceea ce conduce la $AB = 4$ cm. Ţinând seama de cele stabilite anterior, $P_{ABC} = 12 + 4\sqrt{3}$ cm.

20. Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$ ($AB \parallel CD$ şi $DA \perp AB$) în care $AB = 17$ cm, $AC = 13$ cm şi $CD = 12$ cm. Aflaţi P_{ABCD}.

Soluţie

Fie $CE \perp AB$ ($E \in AC$). Deoarece patrulaterul $AECD$ este dreptunghi, rezultă că $AD = CE$ şi $AE = CD = 12$ cm. Având în vedere că $CE^2 = AC^2 - AE^2$ (căci $m(\widehat{CEA}) = 90°$), deducem că $CE = 5$ cm, ceea ce conduce la $AD = 5$ cm. Remarcăm şi faptul că $EB = AB - AE = 5$ cm. Cum $BC^2 = BE^2 + CE^2$, rezultă că $BC = 5\sqrt{2}$ cm. Prin urmare, $P_{ABCD} = 34 + 5\sqrt{2}$ cm.

21. Fie dreptunghiul $ABCD$, $AE \perp BD$ şi $CF \perp BD$ ($E, F \in BD$). Aflaţi perimetrul dreptunghiului, ştiind că $AC = 25$ cm şi $EF = 7$ cm.

Soluţie

Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Întrucât patrulaterul $ABCD$ este dreptunghi, rezultă că $[OA] \equiv [OB] \equiv [OC] \equiv [OD]$. Remarcând faptul că $\Delta OAE \equiv \Delta OCF$ (I.U.), deducem că

Scanned with OKEN Scanner

$[OE] \equiv [OF]$. Drept urmare, $[DE] \equiv [BF]$. Pe de altă parte, $DE + BF = DB - EF = 18$ cm (căci $[DB] \equiv [AC]$). Rezultă că $DE = 9$ cm și $BE = 16$ cm. Deoarece $m(\widehat{BAD}) = 90°$ și $E = pr_{BD}A$, rezultă că $AD^2 = DE \cdot BD$, de unde $AD = 15$ cm. Analog, $AB^2 = BE \cdot BD$, ceea ce conduce la $AB = 20$ cm. Deci, $P_{ABCD} = 70$ cm.

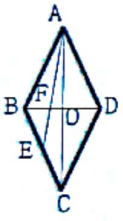
22. **Fie pătratul $ABCD$, $\{O\} = AC \cap BD$, E mijlocul lui $[AB]$ și F mijlocul lui $[OD]$. Aflați distanța EF, știind că $AB = 4\sqrt{2}$ cm.**

Soluție

Remarcăm, mai întâi, că $AC = BD = AB\sqrt{2} = 8$ cm (căci patrulaterul $ABCD$ este pătrat). Cum $AO = \frac{AC}{2}$, rezultă că $AO = 4$ cm. Fie G mijlocul lui $[AD]$. Deoarece $GF \parallel AO$ (fiindcă $[GF]$ este linie mijlocie în triunghiul DAO), $GE \parallel BD$ (căci $[GE]$ este linie mijlocie în triunghiul ABD), iar $AO \perp BD$, rezultă că $GF \perp GE$. Totodată, $GF = \frac{AO}{2} = 2$ cm și $GE = \frac{BD}{2} = 4$ cm. Din cele stabilite anterior deducem că $EF^2 = GF^2 + GE^2 = 20$, de unde $EF = 2\sqrt{5}$ cm.

23. **Se consideră rombul $ABCD$ în care $m(\hat{B}) = 120°$. Fie E mijlocul lui $[BC]$ și $\{F\} = AE \cap BD$. Aflați distanța AE, știind că $BF = 2$ cm.**

Soluție



Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Rezultă că $[OA] \equiv [OC]$. Având în vedere și faptul că $[EB] \equiv [EC]$, iar $\{F\} = BO \cap AE$, deducem că F este centrul de greutate al triunghiului ABC. Prin urmare, $BF = \frac{2BO}{3}$. Cum $BF = 2$ cm, rezultă că $BO = 3$ cm și $FO = 1$ cm. Deoarece $m(\widehat{ABO}) = \frac{m(\widehat{ABC})}{2} = 60°$ și $m(\widehat{AOB}) = 90°$ (căci patrulaterul $ABCD$ este romb), rezultă că $m(\widehat{BAO}) = 30°$, ceea ce implică $AB = 2BO = 6$ cm. Remarcând și faptul că $AO^2 = AB^2 - BO^2$, deducem că $AO = 3\sqrt{3}$ cm. Totodată, $AF^2 = AO^2 + FO^2$, deci $AF = 2\sqrt{7}$ cm. Cum $AF = \frac{2}{3}AE$, conchidem că $AE = 3\sqrt{7}$ cm.

24. **Fie O centrul paralelogramului $ABCD$. Aflați perimetrul paralelogramului, știind că $AC = 6\sqrt{3}$ cm, $BD = 4\sqrt{3}$ cm și $m(\widehat{AOD}) = 60°$.**

Soluție

Deoarece $[OA] \equiv [OC]$ și $[OB] \equiv [OD]$, rezultă că $OA = 3\sqrt{3}$ cm și $OD = 2\sqrt{3}$ cm. Fie $DE \perp AC$ ($E \in AC$). Întrucât $m(\widehat{DOA}) < 90°$ și $m(\widehat{DAO}) < 90°$, rezultă că $E \in (AO)$. Ținând seama de faptul că $m(\widehat{DOE}) = 60°$, deducem că $m(\widehat{ODE}) = 30°$, deci $OE = \frac{OD}{2} = \sqrt{3}$ cm. Totodată, $DE^2 = OD^2 - OE^2$, de unde $DE = 3$ cm. Cum $E \in (AO)$, rezultă că $AE = AO - OE = 2\sqrt{3}$ cm și $EC = AC - AE = 4\sqrt{3}$ cm. Remarcând faptul că $AD^2 = AE^2 + ED^2$ și $DC^2 = EC^2 + DE^2$ (căci $DE \perp AC$), deducem că $AD = \sqrt{21}$ cm, iar $DC = \sqrt{57}$ cm. Drept urmare, $P_{ABCD} = 2(\sqrt{21} + \sqrt{57})$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

25. **Se consideră triunghiul isoscel ABC în care $AB = AC = 10$ cm și $BC = 12$ cm. Aflați lungimea fiecăreia dintre înălțimile triunghiului.**

Soluție

Fie $AD \perp BC$, $BE \perp CA$ și $CF \perp AB$ ($D \in BC$, $E \in CA$ și $F \in AB$). Deoarece $[AB] \equiv [AC]$ și $AD \perp BC$, rezultă că $BD = \frac{BC}{2} = 6$ cm. Având în vedere că $AD^2 = AB^2 - BD^2$, deducem că $AD = 8$ cm. Cum $\mathcal{A}[ABC] = \frac{BC \cdot AD}{2}$, rezultă că $\mathcal{A}[ABC] = 48$ cm^2. Totodată, $\mathcal{A}[ABC] = \frac{CA \cdot BE}{2} = 5BE$. Prin urmare, $5BE = 48$, de unde $BE = 9{,}6$ cm. Remarcând și faptul că $[CF] \equiv [BE]$ (căci într-un triunghi isoscel înălțimile corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente), conchidem că $CF = 9{,}6$ cm.

26. **Aflați perimetrul triunghiului ABC, știind că $AB = 6\sqrt{2}$ cm, $AC = 6\sqrt{5}$ cm și $m(\hat{B}) = 45°$.**

Soluție

Fie $AD \perp BC$ ($D \in BC$). Deoarece $m(\hat{B}) < 90°$ și $m(\hat{C}) < 90°$ (căci $AB < AC$ implică $m(\hat{C}) < m(\hat{B})$), rezultă că $D \in (BC)$. Din faptul că $m(\widehat{ADB}) = 90°$ și $m(\widehat{ABD}) = 45°$ deducem că $m(\widehat{BAD}) = 45°$, deci $[BD] \equiv [AD]$. Totodată, $BD^2 + AD^2 = AB^2$. Rezultă că $2BD^2 = 72$, de unde $BD = 6$ cm și $AD = 6$ cm. Întrucât $DC^2 = AC^2 - AD^2$, rezultă că $DC = 12$ cm și, deci, $BC = 18$ cm (căci $BC = BD + CD$). Prin urmare, $P_{ABC} = 18 + 6\sqrt{2} + 6\sqrt{5}$ cm.

27. **Aflați perimetrul triunghiului isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$), știind că $m(\hat{B}) = 75°$ și că $AB = 2\sqrt{3}$ cm.**

Soluție

Deoarece $\hat{B} \equiv \hat{C}$ (căci $[AB] \equiv [AC]$) și $m(\hat{B}) = 75°$, rezultă că $m(\hat{A}) = 30°$. Fie $BD \perp AC$ ($D \in AC$). Evident, $D \in (AC)$. Deducem că $BD = \frac{AB}{2} = \sqrt{3}$ (din triunghiul ABD) și că $AD = 3$ cm (fiindcă $AD^2 = AB^2 - BD^2$). Cum $DC = AC - AD$, rezultă că $DC = 2\sqrt{3} - 3$ cm. Remarcând și faptul că $BC^2 = BD^2 + DC^2$, deducem că $BC^2 = 6(4 - 2\sqrt{3})$, ceea ce conduce la $BC = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$ cm (căci $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$). Drept urmare, $P_{ABC} = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - \sqrt{6}$ cm.

28. **Aflați perimetrul triunghiului ABC, știind că $m(\hat{B}) = 75°$, $m(\hat{C}) = 45°$ și $AC = 2 + 2\sqrt{3}$ cm.**

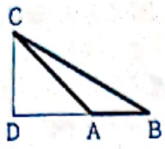
Soluție

Evident, $m(\hat{A}) = 60°$. Fie $BD \perp AC$ ($D \in AC$) și $x = AD$. Întrucât $m(\hat{A}) < 90°, m(\hat{C}) < 90°$ și $BD \perp AC$, rezultă că $D \in (AC)$. Deducem că $AB = 2x$ (căci $m(\widehat{ADB}) = 90°$ și $m(\widehat{ABD}) = 30°$), iar $BD = x\sqrt{3}$ (fiindcă $BD^2 = AB^2 - AD^2$). Cum $[DB] \equiv [DC]$, rezultă că $DC = x\sqrt{3}$ și, cum $AC = AD + DC$, conchidem că $AC = x(1 + \sqrt{3})$, ceea ce conduce la $x = 2$. Prin urmare, $AB = 4$ cm și $BD = 2\sqrt{3}$ cm. Ținând seama și de faptul că $BC^2 = BD^2 + DC^2$, deducem că $BC = 2\sqrt{6}$ cm. Ca urmare a celor stabilite anterior, $P_{ABC} = 2(3 + \sqrt{3} + \sqrt{6})$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

29. **Aflați perimetrul triunghiului ABC, știind că $m(\hat{A}) = 9m(\hat{C})$, $m(\hat{B}) = 2m(\hat{C})$ și $AB = 4$ cm.**

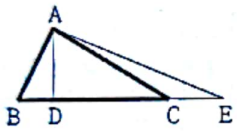
Soluție



Deoarece $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180°$, iar $m(\hat{A}) = 9m(\hat{C})$ și $m(\hat{B}) = 2m(\hat{C})$, rezultă că $m(\hat{C}) = 15°$, $m(\hat{B}) = 30°$ și $m(\hat{A}) = 135°$. Fie $CD \perp AB$ ($D \in AB$) și $x = CD$. Întrucât $m(\hat{A}) > 90°$, $m(\hat{B}) < 90°$ și $CD \perp AB$, rezultă că $A \in (DB)$. Remarcăm și faptul că $m(\widehat{CAD}) = 45°$. Ținând seama de cele stabilite anterior, deducem că $BC = 2x$ (din triunghiul BCD) și $DA = x$ (din triunghiul ACD). Cum $BD^2 = BC^2 - CD^2$, rezultă că $BD = x\sqrt{3}$ și, cum $DB - DA = AB$, conchidem că $x(\sqrt{3} - 1) = 4$, de unde $x = 2(\sqrt{3} + 1)$. Drept urmare, $BC = 4(\sqrt{3} + 1)$ cm, $AC = 2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ cm (căci $AC^2 = 2CD^2$), iar $P_{ABC} = 8 + 2(\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6})$ cm.

30. **Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care $AB = 13$ cm, $BC = 21$ cm și $AD = 12$ cm ($AD \perp BC$ și $D \in BC$). Perpendiculara în A pe dreapta AB intersectează dreapta BC în E. Aflați perimetrul triunghiului ACE.**

Soluție



Întrucât $BD^2 = AB^2 - AD^2$ (căci $m(\widehat{ADB}) = 90°$), rezultă că $BD = 5$ cm, ceea ce implică $DC = 16$ cm (fiindcă $DC = BC - BD$). Ținând seama și de faptul că $AC^2 = AD^2 + DC^2$, deducem că $AC = 20$ cm. Deoarece $AB^2 = BD \cdot BE$ (căci $m(\widehat{BAE}) = 90°$ și $AD \perp BE$), rezultă că $BE = \frac{169}{5}$ cm. Remarcând că $m(\widehat{BAC}) < 90°$, $E \in BC$ și $EA \perp AB$, deducem că $C \in (BE)$, ceea ce implică $CE = BE - BC$, de unde $CE = \frac{64}{5}$ cm. Cum $DE = BE - BD$, rezultă că $DE = \frac{144}{5}$ cm. Totodată, $AE^2 = ED \cdot EB$ (căci $m(\widehat{EAB}) = 90°$ și $AD \perp EB$), de unde $AE = \frac{156}{5}$ cm. Ținând seama de cele stabilite anterior, perimetrul triunghiului ABC este de 64 cm.

31. **Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90°$) în care $AB < AC$. Arătați că, dacă $(AB - AC)^2 = 2AB \cdot AC$, atunci $m(\hat{C}) = 15°$.**

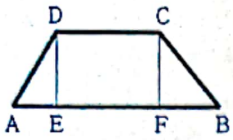
Soluție

Evident, egalitatea $(AB - AC)^2 = 2AB \cdot AC$ este echivalentă cu $AB^2 + AC^2 = 4AB \cdot AC$. Remarcând și faptul că $AB^2 + AC^2 = BC^2$, deducem că $BC^2 = 4AB \cdot AC$. Fie $AD \perp BC$ și E mijlocul lui $[BC]$ ($AB < AC$ implică $D \in (AE)$). Rezultă că $AD \cdot BC = AB \cdot AC$ și $BC = 2AE$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $BC^2 = 4AD \cdot BC$, de unde $BC = 4AD$, ceea ce conduce la $AE = 2AD$. Rezultă că $m(\widehat{AED}) = 30°$ (căci $m(\widehat{ADE}) = 90°$). Pe de altă parte, $m(\widehat{AED}) = m(\widehat{ECA}) + m(\widehat{EAC}) = 2m(\widehat{ECA})$, deci $m(\widehat{ECA}) = 15°$, ceea ce este totuna cu $m(\hat{C}) = 15°$.

32. **Se consideră trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$) în care $AB = 13$ cm, $BC = 4\sqrt{2}$ cm, $CD = 6$ cm și $DA = 5$ cm. Aflați lungimea înălțimii trapezului.**

Scanned with OKEN Scanner

Soluție



Fie E și F picioarele perpendicularelor din D, respectiv C pe dreapta AB. Deoarece $DE^2 = AD^2 - AE^2$ (din triunghiul dreptunghic ABE), $CF^2 = BC^2 - BF^2$ (din triunghiul dreptunghic BCF) și $DE = CF$ (fiindcă patrulaterul $CDEF$ este dreptunghi), rezultă că $AD^2 - AE^2 = BC^2 - BF^2$, de unde $BF^2 = BC^2 - AD^2 + AE^2$, ceea ce conduce la $BF^2 = 7 + AE^2$. Ținând seama și de faptul că $BF = 7 - AE$ (căci $BF = AB - AF = AB - EF - AE = AB - CD - AE$), deducem că $(7 - AE)^2 = 7 + AE^2$, de unde $AE = 3$ cm și, deci, $DE = 4$ cm.

33. Aflați perimetrul trapezului $ABCD$ ($AB \parallel CD$), știind că $AB = 5 + 2\sqrt{3}$ cm, $CD = 3$ cm, $m(\hat{A}) = 60°$ și $m(\hat{C}) = 135°$.

Soluție

Întrucât $m(\hat{B}) = 180° - m(\hat{C})$ (căci $AB \parallel DC$) și $m(\hat{C}) = 135°$, rezultă că $m(\hat{B}) = 45°$. Fie $DE \perp AB$, $CF \perp AB$ ($E, F \in AB$) și $x = AE$. Deoarece (în triunghiul ADE) $m(\widehat{AED}) = 90°$ și $m(\widehat{ADE}) = 30°$ (fiindcă $m(\widehat{DAE}) = 60°$), rezultă că $AD = 2AE = 2x$. Totodată, $DE^2 = AD^2 - AE^2$, deci $DE = x\sqrt{3}$. Având în vedere faptul că patrulaterul $CDEF$ este dreptunghi, deducem că $CF = x\sqrt{3}$ și $EF = 3$ cm. Cum (în triunghiul BCF) $m(\widehat{BFC}) = 90°$ și $m(\widehat{CBF}) = 45°$, rezultă că $FB = CF = x\sqrt{3}$ și $BC = x\sqrt{6}$ (căci $BC^2 = CF^2 + FB^2$). Remarcând și faptul că $AE + EF + FB = AB$, deducem că $x + 3 + x\sqrt{3} = 5 + 2\sqrt{3}$, de unde $x = 2$ cm. Ca urmare a celor stabilite anterior, $AD = 4$ cm, $BC = 2\sqrt{6}$ cm și, deci, $P_{ABCD} = 12 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$ cm.

34. Într-un triunghi dreptunghic, o catetă are lungimea de 8 cm, iar proiecția celeilalte catete pe ipotenuză are lungimea de 12 cm. Aflați perimetrul triunghiului.

Soluție

Fie ABC ($m(\hat{A}) = 90°$) triunghiul menționat în enunț și $D = \underset{BC}{pr}A$. Pentru fixare, să considerăm că $AB = 8$ cm. Atunci, $CD = 12$ cm. Fie $x = BD$. Deoarece $m(\widehat{BAC}) = 90°$ și $D = \underset{BC}{pr}A$, rezultă că $AB^2 = BD \cdot BC$, de unde $x(x + 12) = 64$. Cum $x(x + 12) = x^2 + 12x = (x + 6)^2 - 36$, egalitatea anterioară conduce la $(x + 6)^2 = 100$, de unde $x + 6 = 10$ și, deci, $x = 4$, ceea ce implică $BC = 16$ cm. Având în vedere și faptul că $AC^2 = BC^2 - AB^2$, deducem că $AC = 8\sqrt{3}$ cm. În consecință, $P_{ABC} = 24 + 8\sqrt{3}$ cm.

35. Fie dreptunghiul $ABCD$, $AE \perp BD$ și $CF \perp BD$ ($E, F \in BD$). Aflați perimetrul dreptunghiului, știind că $AD = 2\sqrt{5}$ cm și $EF = 6$ cm.

Soluție

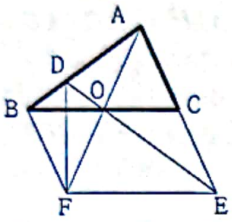
Fie $x = DE$. Remarcând faptul că $BE = BF + EF$ și că $[BF] \equiv [DE]$ (căci $\Delta BFC \equiv \Delta DEA$), deducem că $BD = 2x + 6 = 2(x + 3)$. Deoarece (în triunghiul ABD) $m(\widehat{BAD}) = 90°$ și $E = \underset{BD}{pr}A$, rezultă că $BD \cdot DE = AD^2$, de unde $x(x + 3) = 10$, ceea ce este totuna cu $x^2 + 3x - 10 = 0$. Având în vedere că

Scanned with OKEN Scanner

$x^2+3x-10=x^2-2x+5x-10=x(x-2)+5(x-2)=(x-2)(x+5)$, ecuația $x^2+3x-10=0$ este echivalentă cu $(x-2)(x+5)=0$. Prin urmare, $x=2$ sau $x=-5$. Întrucât $x>0$, convine numai $x=2$. Deducem imediat că $BD=10$ cm. Cum $AB^2=BD^2-AD^2$, rezultă că $AB=4\sqrt{5}$ cm și, deci, $P_{ABCD}=12\sqrt{5}$ cm.

36. Fie triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A})=90°$), O mijlocul lui $[BC]$, D și E intersecțiile perpendicularei în O pe OA cu AB, respectiv AC și F intersecția paralelei prin B la AC cu AO. Aflați perimetrul patrulaterului $ADFE$, știind că $m(\widehat{ABC})=30°$ și $AO=6$ cm.

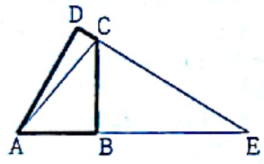
Soluție



Având în vedere că $[OB]\equiv[OC]$, $\widehat{BOF}\equiv\widehat{COA}$ și $\widehat{OBF}\equiv\widehat{OCA}$ (căci $BF\parallel CA$), deducem că $\Delta OBF\equiv\Delta OCA$ (U.L.U.), de unde $[OF]\equiv[OA]$, ceea ce, împreună cu $DE\perp AF$, conduce la $[DA]\equiv[DF]$ și $[EA]\equiv[EF]$. Prin urmare, $P_{ADEF}=2(2AD+AE)$. Întrucât $m(\widehat{AOD})=90°$ și $m(\widehat{DAO})=30°$ (fiindcă $[OA]\equiv[OB]$ implică $\widehat{DAO}\equiv\widehat{ABC}$), rezultă că $AD=2DO$. Totodată, $AD^2-DO^2=AO^2$, deci $OD=2\sqrt{3}$ cm și $AD=4\sqrt{3}$ cm. Remarcând faptul că $m(\widehat{AOE})=90°$ și $m(\widehat{AEO})=90°-m(\widehat{OAE})=30°$, deducem că $AE=2AO=12$ cm. Drept urmare, $P_{ADFE}=24+8\sqrt{3}$ cm.

37. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ în care $m(\hat{A})=60°$, $m(\hat{B})=m(\hat{D})=90°$, $BC=11$ cm și $CD=2$ cm. Aflați lungimea diagonalei AC.

Soluție

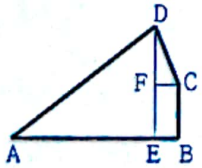


Fie $\{E\}=AB\cap DC$.

Evident, $m(\widehat{AED})=30°$ (din triunghiul dreptunghic ADE), ceea ce este totuna cu $m(\widehat{BEC})=30°$. Remarcând și faptul că $m(\widehat{CBE})=90°$, deducem că $CE=2BC=22$ cm. Cum $DE=DC+CE$, rezultă că $DE=24$ cm. Deoarece $m(\widehat{ADE})=90°$ și $m(\widehat{AED})=30°$, rezultă că $AE=2AD$. Totodată, $AE^2-AD^2=DE^2$, de unde $3AD^2=576$, ceea ce conduce la $AD=8\sqrt{3}$ cm. Ținând seama și de faptul că $AC^2=AD^2+DC^2$, deducem că $AC=14$ cm.

38. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ în care $m(\hat{A})=30°$, $m(\hat{B})=m(\hat{D})=90°$, $BC=\sqrt{3}$ cm și $CD=2$ cm. Aflați P_{ABCD}.

Soluție



Fie $DE\perp AB$ și $CF\perp DE$ ($D\in AB$ și $F\in DE$). Deoarece $m(\widehat{ADE})=90°-m(\widehat{DAE})=60°$ (din triunghiul ADE), iar $m(\widehat{CDE})=m(\widehat{ADC})-m(\widehat{ADE})$, rezultă că $m(\widehat{CDE})=30°$, ceea ce este totuna cu $m(\widehat{CDF})=30°$. Având în vedere și faptul că $m(\widehat{DFC})=90°$, deducem că $CF=\frac{DC}{2}=1$ cm. Totodată, $DF^2=DC^2-CF^2$, deci $DF=\sqrt{3}$ cm. Cum patrulaterul $BCFE$ este dreptunghi, rezultă că $FE=CB=\sqrt{3}$ cm și, cum $DE=DF+FE$, conchidem că $DE=2\sqrt{3}$ cm. Întrucât (în triunghiul ADE) $m(\widehat{AED})=90°$ și $m(\widehat{DAE})=30°$, rezultă că $AD=2DE$, de unde $AD=4\sqrt{3}$ cm. Remarcând și faptul că $AE^2=AD^2-DE^2$,

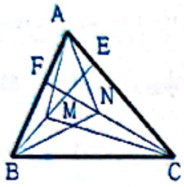
Scanned with OKEN Scanner

deducem că $AE = 6$ cm, ceea ce, împreună cu $AB = AE + EB$, conduce la $AB = 7$ cm. Ca urmare a celor stabilite anterior, $P_{ABCD} = 9 + 5\sqrt{3}$ cm.

39. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC. Fie E piciorul înălțimii din B, F piciorul înălțimii din C și punctele $M \in BE$, $N \in CF$ astfel încât $m(\widehat{AMC}) = m(\widehat{ANB}) = 90°$. Arătați că $[AN] \equiv [AM]$.

O.M., etapa județeană, Buzău, 1995

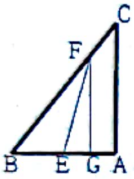
Soluție



Deoarece triunghiul AMC este dreptunghic în M, iar $ME \perp AC$, în baza teoremei catetei, deducem că $AM^2 = AC \cdot AE$. Întrucât triunghiul ANB este dreptunghic în N, iar $NF \perp AB$, rezultă că $AN^2 = AB \cdot AF$. Ținând seama și de faptul că $AC \cdot AE = AB \cdot AF$ (căci $\Delta ACF \sim \Delta ABE$), conchidem că $AM^2 = AN^2$, ceea ce conduce la $AM = AN$, deci $[AM] \equiv [AN]$.

40. Se consideră triunghiul dreptunghic isoscel ABC ($m(\hat{A}) = 90°$) în care $AB = 8$ cm. Fie E mijlocul lui $[AB]$ și F un punct pe (BC) astfel încât $FB = 3FC$. Aflați lungimea segmentului EF.

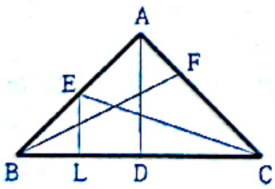
Soluție



Remarcăm, mai întâi, faptul că $[AC] \equiv [AB]$. Fie $FG \perp AB$ ($G \in AB$). Deoarece $FG \parallel CA$, rezultă că $\Delta BFG \sim \Delta BCA$, ceea ce implică $\frac{FG}{CA} = \frac{BG}{BA} = \frac{BF}{BC}$. Ținând seama de faptul că $BF = 3FC$, deducem că $\frac{BF}{BC} = \frac{3}{4}$. Prin urmare, $\frac{FG}{8} = \frac{BG}{8} = \frac{3}{4}$, de unde $FG = BG = 6$ cm. Întrucât $EG = BG - BE$, iar $BE = \frac{BA}{2} = 4$ cm, rezultă că $EG = 2$ cm. În final, remarcând că $EF^2 = EG^2 + FG^2$ (căci $m(\widehat{FGE}) = 90°$), deducem că $EF = 2\sqrt{10}$ cm.

41. Fie triunghiul dreptunghic isoscel ABC ($m(\hat{A}) = 90°$), E mijlocul lui $[AB]$ și F un punct pe (AC) astfel încât $\widehat{ABF} \equiv \widehat{BCE}$. Arătați că $CF = 2AF$.

Soluție



Fie $AD \perp BC$ și $EL \perp BC$ ($D, L \in BC$). Întrucât $m(\widehat{BAF}) = m(\widehat{CLE}) = 90°$ și $\widehat{ABF} \equiv \widehat{LCE}$, rezultă că $\Delta ABF \sim \Delta LCE$, de unde $\frac{AF}{LE} = \frac{AB}{LC}$, ceea ce este totuna cu $\frac{AF}{AC} = \frac{LE}{LC}$ (fiindcă $[AB] \equiv [AC]$). Remarcăm și faptul că $LE = \frac{AD}{2}$ (căci $[LE]$ este linie mijlocie în triunghiul BAD). Fie $a = AB$. Rezultă că $BC = a\sqrt{2}$ (fiindcă $BC^2 = AB^2 + AC^2$), $AD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (căci $AD = \frac{BC}{2}$) și $LE = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Ținând seama și de faptul că $EC^2 = AC^2 + AE^2$ și $LC^2 = EC^2 - EL^2$, deducem că $EC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ și $LC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$. În consecință, $\frac{LE}{LC} = \frac{1}{3}$.

Ca urmare a celor stabilite anterior, $\frac{AF}{AC} = \frac{1}{3}$, ceea ce conduce la $CF = 2AF$.

42. Fie pătratul $ABCD$, E mijlocul lui $[BC]$, $\{F\} = AC \cap DE$ și G un punct pe (DF) astfel

Scanned with OKEN Scanner

încât $FG\sqrt{10} = FA$. **Arătați că** $AG \perp DE$.

Soluție

Fie $a = AB$ și $CH \perp DE$ ($H \in DE$). Deoarece $DE^2 = DC^2 + CE^2 = \frac{5a^2}{4}$, rezultă că $DE = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Remarcând și faptul că $CH = \frac{CD \cdot CE}{DE}$, deducem că $CH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. Întrucât $\Delta FEC \sim \Delta FDA$ (căci $CE \parallel AD$), rezultă că $\frac{FC}{FA} = \frac{CE}{AD} = \frac{1}{2}$, de unde $\frac{FC}{AC} = \frac{1}{3}$, ceea ce conduce la $FC = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. Totodată, $FH^2 = FC^2 - CH^2 = \frac{a^2}{45}$, de unde $FH = \frac{a\sqrt{5}}{15}$, deci $\frac{FH}{FC} = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Cum și $\frac{FG}{FA} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ (din enunț), rezultă că $\frac{FG}{FA} = \frac{FH}{FC}$, ceea ce, împreună cu $\widehat{AFG} \equiv \widehat{CFH}$, conduce la $\Delta AFG \sim \Delta CFH$. Drept urmare, $\widehat{AGF} \equiv \widehat{CHF}$, de unde $m(\widehat{AGF}) = 90°$. Rezultă că $AG \perp DE$.

43. Fie triunghiul dreptunghic ABC **și** D **intersecția bisectoarei unghiului** BAC **cu ipotenuza** BC. **Aflați** P_{ABC}, **știind că** $AC = 7$ cm **și că** $AD = 4\sqrt{2}$ cm.

Soluție

Fie $DE \perp AC$ ($E \in AC$). Deoarece $m(\widehat{BAC}) = 90°$ (căci $[BC]$ este ipotenuza triunghiului ABC), rezultă că $m(\widehat{DAC}) = 45°$, ceea ce implică $m(\widehat{ADE}) = 45°$ (căci $DE \perp AC$). Prin urmare, triunghiul ADE este isoscel (de vârf E), de unde $2AE^2 = AD^2$, ceea ce conduce la $AE = 4$ cm. În consecință, $ED = 4$ cm și $CE = 3$ cm. Remarcând și faptul că $CD^2 = CE^2 + DE^2$ (fiindcă $m(\widehat{CED}) = 90°$), deducem că $CD = 5$ cm. Întrucât $ED \parallel AB$ (căci $ED \perp AC$ și $AB \perp AC$), rezultă că $\Delta CAB \sim \Delta CED$, de unde $\frac{CB}{CD} = \frac{AB}{ED} = \frac{CA}{CE}$, deci $\frac{CB}{5} = \frac{AB}{4} = \frac{7}{3}$, ceea ce implică $CB = \frac{35}{3}$ cm și $AB = \frac{28}{3}$ cm. Drept urmare, $P_{ABC} = 28$ cm.

44. Determinați perimetrul unui triunghi dreptunghic, știind că bisectoarea unuia dintre unghiurile ascuțite ale triunghiului determină pe cateta opusă unghiului două segmente de lungime 4 cm **și, respectiv,** 5 cm.

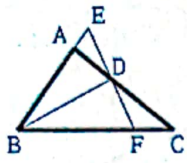
Soluție

Fie ABC triunghiul considerat în enunțul problemei ($m(\hat{A}) = 90°$), D intersecția bisectoarei unghiului ACB cu latura AB și $DE \perp BC$ ($D \in BC$). Deoarece $DA = DE$ (căci $\widehat{ACD} \equiv \widehat{ECD}$ și $DA \perp AC$, $DE \perp EC$), iar $DE < DB$ (din triunghiul BDE), rezultă că $DA < DB$. Prin urmare, $DA = 4$ cm și $DB = 5$ cm. Remarcând și faptul că $\frac{AC}{BC} = \frac{DA}{DB}$ (căci $[CB$ este bisectoarea unghiului ACB), deducem că $\frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}$, de unde $AC = 4k$ și $BC = 5k$ ($k > 0$). Totodată, $BC^2 - AC^2 = AB^2$ (fiindcă $m(\hat{A}) = 90°$) și $AB = 9$ cm (căci $AB = DA + DB$), deci $9k^2 = 81$, de unde $k = 3$. Drept urmare, $AC = 12$ cm, $BC = 15$ cm și $P_{ABC} = 36$ cm.

45. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90°$) **în care** $AC = 8$ cm **și** $BC = 10$ cm. **Bisectoarea unghiului** ABC **intersectează latura** AC **în** D, **iar perpendiculara în** D **pe** DB **intersectează** AB **în** E **și** BC **în** F. **Aflați perimetrul triunghiului** BEF.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție



Evident, $AB^2 = BC^2 - CA^2$, de unde $AB = 6$ cm. Întrucât $\widehat{EBD} \equiv \widehat{FBD}$ și $BD \perp EF$, rezultă că $[BE] \equiv [BF]$ și $[ED] \equiv [EF]$. Ținând seama și de faptul că $P_{BEF} = BE + BF + EF$, deducem că $P_{BEF} = 2(BE + ED)$. Deoarece $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC}$ (căci $[BD$ este bisectoarea unghiului ABC), rezultă că $\frac{DA}{AC} = \frac{BA}{BC + BA}$, de unde $DA = 3$ cm. Având în vedere că $BD^2 = AD^2 + AB^2$, deducem că $BD = 3\sqrt{5}$ cm. Cum $BD^2 = BE \cdot AB$ (căci $m(\widehat{BDE}) = 90°$ și $A = pr_{BE}D$), rezultă că $BE = 7{,}5$ cm. Prin urmare, $AE = 1{,}5$ cm (fiindcă $AE = BE - AB$). Remarcând și faptul că $ED^2 = AD^2 + AE^2$, deducem că $ED = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ cm. Rezultă că $P_{BEF} = 15 + 3\sqrt{5}$ cm.

46. Fie G centrul de greutate al triunghiului isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) și D un punct pe $(BC$ astfel încât $[DG$ să fie bisectoarea unghiului ADB. Aflați perimetrul triunghiului ABD, știind că $AB = 7$ cm și $BC = 2$ cm.

Soluție

Fie E mijlocul lui $[BC]$. Deoarece G este centrul de greutate al triunghiului ABC, rezultă că $G \in (AE)$ și $GA = 2GE$. Remarcând și faptul că $\frac{DA}{DE} = \frac{GA}{GE}$ (căci $[DG$ este bisectoarea unghiului ADE), deducem că $DA = 2DE$. Totodată, $AE^2 = AD^2 - DE^2$ (fiindcă $[AB] \equiv [AC]$ și $[EB] \equiv [EC]$ implică $AE \perp BC$), deci $AE = DE\sqrt{3}$. Cum $AE^2 = AB^2 - BE^2$, rezultă că $AE = 4\sqrt{3}$ cm. Drept urmare, $DE = 4$ cm și $DA = 8$ cm. Ținând seama și de faptul că $BD = BE + ED$, deducem că $BD = 5$ cm. În consecință, $P_{ABD} = 20$ cm.

47. Determinați măsura fiecăruia dintre unghiurile triunghiului ABC, știind că $AB = \sqrt{2}$ cm, $BC = 2\sqrt{2}$ cm și $CA = \sqrt{6}$ cm.

Soluție

Întrucât $AB^2 + CA^2 = 8$ și $BC^2 = 8$, rezultă că $AB^2 + CA^2 = BC^2$, ceea ce implică $m(\hat{A}) = 90°$. Remarcând și faptul că $AB = \frac{BC}{2}$, deducem că $m(\hat{C}) = 30°$. Drept urmare, $m(\hat{B}) = 60°$.

48. Aflați aria unui triunghi, știind că lungimile laturilor sale sunt direct proporționale cu 8, 15, 17 și că perimetrul său are 80 cm.

Soluție

Fie ABC triunghiul menționat în enunțul problemei. Pentru fixare, să considerăm că $\frac{AB}{8} = \frac{BC}{15} = \frac{CA}{17}$. Deducem că $\frac{AB}{8} = \frac{BC}{15} = \frac{CA}{17} = \frac{AB + BC + CA}{40} = 2$, de unde $AB = 16$ cm, $BC = 30$ cm și $CA = 34$ cm. Cum $AB^2 + BC^2 = 1156$ și $CA^2 = 1156$, rezultă că $AB^2 + BC^2 = CA^2$, ceea ce implică $m(\hat{B}) = 90°$. Prin urmare, $\mathcal{A}[ABC] = \frac{AB \cdot BC}{2} = 240$ cm^2.

49. Aflați perimetrul trapezului isoscel $ABCD$ ($AB \parallel CD$), știind că $AB = 9$ cm, $AC = 6\sqrt{2}$ cm și $BC = 3$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție

Întrucât $AC^2+BC^2=81$ și $AB^2=81$, rezultă că $AC^2+BC^2=AB^2$, ceea ce implică $m(\widehat{ACB})=90°$. Fie $CE\perp AB$ $(E\in AB)$. Atunci, $CE=\frac{CA\cdot CB}{AB}=2\sqrt{2}$ cm. Totodată, $EB^2=BC^2-CE^2$, de unde $EB=1$ cm. Cum $EB=\frac{AB-CD}{2}$ (căci trapezul $ABCD$ este isoscel), rezultă că $CD=7$ cm. Drept urmare, $P_{ABCD}=22$ cm.

50. Fie O mijlocul laturii AC a triunghiului ABC. Aflați perimetrul triunghiului, știind că $AB=10$ cm, $BC=24$ cm și $BO=13$ cm.

Soluție

Fie D simetricul lui B față de O. Deoarece $[OB]\equiv[OD]$ și $[OA]\equiv[OC]$, rezultă că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram, de unde $CD=AB=10$ cm. Remarcăm și faptul că $BD=2BO=26$ cm. Având în vedere că $BC^2+CD^2=676$, iar $BD^2=676$, deducem că $BC^2+CD^2=BD^2$, ceea ce implică $m(\widehat{BCD})=90°$. Prin urmare, patrulaterul $ABCD$ este dreptunghi, de unde $AC=BD=26$ cm și, deci, $P_{ABC}=60$ cm.

51. Fie triunghiul ABC și D intersecția bisectoarei unghiului ABC cu latura AC. Aflați lungimea segmentului BD, știind că $DA=9$ cm, $DC=15$ cm și $P_{ABC}=72$ cm.

Soluție

Evident, $AC=DA+DC=24$ cm. Cum $AB+BC=P_{ABC}-AC$, rezultă că $AB+BC=48$ cm. Deoarece $\frac{AB}{BC}=\frac{DA}{DC}$ (căci $[BD$ este bisectoarea unghiului $ABC)$, rezultă că $\frac{AB}{BC}=\frac{3}{5}$, de unde $\frac{AB}{AB+BC}=\frac{3}{8}$. Deducem că $AB=18$ cm și $BC=30$ cm. Se arată cu ușurință că $AB^2+AC^2=BC^2$, de unde $m(\widehat{BAC})=90°$, ceeea ce este totuna cu $m(\widehat{BAD})=90°$. Prin urmare, $BD^2=AB^2+AD^2$, de unde $BD=9\sqrt{5}$ cm.

52. Aflați perimetrul trapezului isoscel $ABCD$ $(AB\parallel CD)$, știind că $AC=14$ cm, $AD=10$ cm și $\frac{CD}{AB}=\frac{3}{4}$.

Soluție

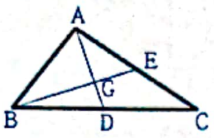
Fie $\{O\}=AC\cap BD$. Întrucât $\triangle OCD\sim\triangle OAB$ (căci $CD\parallel AB$), rezultă că $\frac{OC}{OA}=\frac{CD}{AB}=\frac{3}{4}$, de unde $\frac{OC}{AC}=\frac{3}{7}$, ceea ce conduce la $OC=6$ cm. Cum $OA=AC-OC$, rezultă că $OA=8$ cm. Remarcăm și faptul că $[OB]\equiv[OA]$ și $[OD]\equiv[OC]$ (fiindcă trapezul $ABCD$ este isoscel), de unde $OB=8$ cm și $OD=6$ cm. Ținând seama de cele stabilite anterior, deducem că $OA^2+OD^2=AD^2$, ceea ce implică $m(\widehat{AOD})=90°$. Drept urmare, $m(\widehat{AOB})=$ $=m(\widehat{COD})=90°$, de unde $AB^2=OA^2+OB^2$, respectiv $CD^2=OC^2+OD^2$, ceea ce conduce la $AB=8\sqrt{2}$ cm și $CD=6\sqrt{2}$ cm. Ca urmare a celor stabilite anterior, $P_{ABCD}=20+14\sqrt{2}$ cm.

53. Fie D mijlocul laturii BC și E mijlocul laturii CA în triunghiul ABC. Aflați perimetrul triunghiului, știind că $AD=6$ cm, $BE=9$ cm și $CA=10$ cm.

Soluție

Fie $\{G\}=AD\cap BE$. Deoarece G este centrul de greutate în triunghiul ABC,

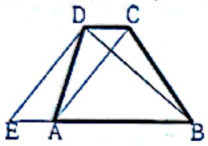
Scanned with OKEN Scanner



rezultă că $AG=\frac{2AD}{3}=4$ cm și $GE=\frac{BE}{3}=3$ cm, de unde $AG^2+GE^2=25$. Remarcând și faptul că $AE^2=25$ (căci $AE=\frac{AC}{2}=5$ cm), deducem că $AG^2+GE^2=AE^2$, ceea ce arată că $m(\widehat{AGE})=90°$. Întrucât $AG=4$ cm, $BG=6$ cm și $m(\widehat{AGB})=90°$, rezultă că $AB^2=AG^2+BG^2=52$, de unde $AB=2\sqrt{13}$ cm. Totodată, $BD^2=BG^2+DG^2$ (fiindcă $m(\widehat{BGD})=90°$), ceea ce conduce la $BD=2\sqrt{10}$ cm și, deci, $BC=4\sqrt{10}$ cm (căci $BC=2BD$). Ca urmare a celor stabilite anterior, perimetrul triunghiului ABC este egal cu $10+2\sqrt{13}+4\sqrt{10}$ cm.

54. Se consideră trapezul $ABCD$ $(AB\parallel CD)$. Arătați că $AC\perp BD$ dacă și numai dacă $AC^2+BD^2=(AB+CD)^2$.

Soluție



Fie E intersecția dreptei AB cu paralela prin D la dreapta AC. Deoarece patrulaterul $ACDE$ este paralelogram, rezultă că $AE=CD$ și $ED=AC$.

1. Să demonstrăm implicația: dacă $AC\perp BD$, atunci $AC^2+BD^2=(AB+CD)^2$.

Din faptul că $BD\perp AC$, iar $AC\parallel DE$ deducem că $BD\perp DE$. Prin urmare, $m(\widehat{BDE})=90°$, ceea ce implică $ED^2+BD^2=EB^2$. Ținând seama și de faptul că $ED=AC$, iar $EB=EA+AB=CD+AB$ (căci $A\in(EB)$ și $EA=CD$), conchidem că $AC^2+BD^2=(AB+CD)^2$.

2. Să demonstrăm implicația: dacă $AC^2+BD^2=(AB+CD)^2$, atunci $AC\perp BD$. Întrucât $AC^2+BD^2=(AB+CD)^2$, iar $AC=ED$ și $CD=EA$, rezultă că $ED^2+BD^2=(AB+EA)^2$, de unde $ED^2+BD^2=EB^2$, ceea ce arată că $m(\widehat{EDB})=90°$ (din reciproca teoremei lui Pitagora). Prin urmare, $ED\perp DB$, ceea ce, împreună cu $ED\parallel AC$, conduce la $AC\perp BD$.

55. Fie dreptunghiul $ABCD$, E mijlocul lui $[AB]$ și F un punct pe $[AD]$ astfel încât $FD=3FA$. Arătați că $FE\perp EC$ dacă și numai dacă $[AB]\equiv[AD]$.

Soluție

Fie $a=AB$ și $b=AD$. Rezultă că $AE=EB=\frac{a}{2}$ și că $AF=\frac{b}{4}$, $FD=\frac{3b}{4}$. Deducem că $EC^2=b^2+\frac{a^2}{4}$ (din triunghiul BCE), $EF^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{16}$ (din triunghiul AEF) și $CF^2=\frac{9b^2}{16}+a^2$ (din triunghiul CDF). Remarcând faptul că are loc următorul șir de echivalențe:

$$FE\perp EC\Leftrightarrow EF^2+EC^2=FC^2\Leftrightarrow\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{16}+b^2+\frac{a^2}{4}=\frac{9b^2}{16}+a^2\Leftrightarrow\frac{a^2}{2}+\frac{17b^2}{16}=\frac{9b^2}{16}+a^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{17b^2}{16}-\frac{9b^2}{16}=a^2-\frac{a^2}{2}\Leftrightarrow b^2=a^2\Leftrightarrow a=b\Leftrightarrow[AB]\equiv[AD],$$

deducem că cerința enunțului a fost îndeplinită.

PROBLEME PROPUSE

1. Fie triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A})=90°)$ și $AD\perp BC$ $(D\in BC)$. Arătați că $\frac{DB}{DC}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Fie triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$ și $AD \perp BC$ $(D \in BC)$. Aflați P_{ABC}, știind că $BD = 4$ cm și $CD = 12$ cm.

3. Fie triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$ și $AD \perp BC$ $(D \in BC)$. Aflați P_{ABC}, știind că $AB = 12$ cm și $BD = 6$ cm.

4. Fie triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$ și $AD \perp BC$ $(D \in BC)$. Aflați P_{ABC}, știind că $BD = 9$ cm și $\frac{CD}{BC} = \frac{16}{25}$.

5. Fie triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$, $AD \perp BC$ și $DE \perp AB$ $(D \in BC$ și $E \in AB)$. Arătați că $DB \cdot DC = AE \cdot AB$.

6. Fie triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$ și $AD \perp BC$ $(D \in BC)$. Aflați P_{ABC}, știind că $AD = 12$ cm și $BD = 9$ cm.

7. Fie triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$ și $AD \perp BC$ $(D \in BC)$. Aflați $\mathcal{A}[ABC]$, știind că $AD = 2{,}4$ cm și $CD = 1{,}8$ cm.

8. Fie triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$ și $AD \perp BC$. Aflați lungimile catetelor triunghiului, știind că $AD = 12$ cm și $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{12}$.

9. Fie triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$ și $AD \perp BC$. Aflați $\mathcal{A}[ABC]$, știind că $BC = 10$ cm și $\frac{BD}{CD} = \frac{9}{16}$.

10. Fie O centrul rombului $ABCD$ și $E = pr_{AB} O$. Aflați lungimea laturii AB, știind că $BD = 8$ cm și $BE = 3{,}2$ cm.

11. Fie triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$, $AD \perp BC$, $DE \perp AB$ și $DF \perp AC$ $(D \in BC,\ E \in AB,\ F \in AC)$. Arătați că $\frac{BE}{CF} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3$.

12. Fie triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$, $AD \perp BC$, $DE \perp AB$ și $DF \perp AC$ $(D \in BC,\ E \in AB,\ F \in AC)$. Arătați că $AD^3 = AE \cdot AF \cdot BC$.

13. Fie triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$ și $AD \perp BC$ $(D \in BC)$. Aflați AD, știind că $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{12}$ și $BC = 26$ cm.

14. Fie triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$ și M mijlocul lui $[BC]$. Aflați P_{ABC}, știind că $AB = 5$ cm și $AM = 6{,}5$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

15. Fie triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$ și M mijlocul lui $[BC]$. Aflați $\mathcal{A}[ABC]$, știind că $AM = 6$ cm și $m(\hat{B}) = 60°$.

16. Fie triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$ și $AD \perp BC$ $(D \in BC)$. Aflați P_{ABC}, știind că $AB = 6$ cm și $AD = 4{,}8$ cm.

17. Fie triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$ și $AD \perp BC$ $(D \in BC)$. Aflați P_{ABC}, știind că $AD = 2\sqrt{3}$ cm și $m(\hat{C}) = 30°$.

18. Măsurile unghiurilor triunghiului ABC sunt invers proporționale cu 5, $7{,}5$, 15, iar lungimea înălțimii corespunzătoare celei mai mari dintre laturi este $\sqrt{6}$ cm. Aflați P_{ABC}.

19. Se consideră triunghiul isoscel ABC $([AB] \equiv [AC])$ în care $BC = 12\sqrt{3}$ cm și $m(\hat{A}) = 120°$. Fie $AD \perp BC$ $(D \in BC)$, E mijlocul lui $[AB]$ și F mijlocul lui $[AC]$. Aflați P_{DEF}.

20. Fie triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$, $D = \underset{BC}{pr}A$ și E mijlocul lui $[BC]$. Aflați $AB + AC$, știind că $AD = 6$ cm și $AE = 7{,}5$ cm.

21. Fie triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$, $D = \underset{BC}{pr}A$ și E mijlocul lui $[BC]$. Aflați P_{ABC}, știind că $AD = 2\sqrt{3}$ cm și $m(\widehat{DAE}) = 30°$.

22. Fie triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$ și $D = \underset{BC}{pr}A$. Aflați P_{ABC}, știind că lungimile laturilor AB și BC sunt direct proporționale cu $0{,}58(3)$ și $1{,}1(6)$, iar $AD = 3\sqrt{3}$ cm.

23. Aflați perimetrul triunghiului ABC, știind că $BC = 2AB$, $AC = 6$ cm și $m(\hat{B}) = 60°$.

24. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC, $D = \underset{BC}{pr}A$ și E mijlocul lui $[BC]$. Arătați că, dacă $AB > AC$, atunci $2BC \cdot DE = AB^2 - AC^2$.

25. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care $BC = 2(\sqrt{3} + 1)$ cm, $CA = 4$ cm și $m(\hat{C}) = 60°$. Aflați $m(\hat{A})$ și $m(\hat{B})$.

26. Fie dreptunghiul $ABCD$ și $E = \underset{BD}{pr}A$. Aflați perimetrul dreptunghiului, știind că $AE = 3\sqrt{3}$ cm și $DE = 3$ cm.

27. Se consideră rombul $ABCD$ în care $AB = 8$ cm și $m(\widehat{ABC}) = 120°$. Aflați lungimea fiecăreia dintre diagonalele rombului.

28. Se consideră paralelogramul $ABCD$ în care $AB = 12$ cm, $BC = 6$ cm și $m(\hat{A}) = 60°$. Aflați lungimea fiecăreia dintre diagonalele paralelogramului.

Scanned with OKEN Scanner

29. Se consideră trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ în care $CA \perp AB$. Aflați perimetrul trapezului, știind că $AB = 16$ cm, $AC = 12$ cm și $CD = 9$ cm.

30. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ în care $AB = 15$ cm, $BC = 3\sqrt{5}$ cm și $CD = 9$ cm. Aflați lungimea uneia dintre diagonalele trapezului.

31. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ în care $AC \perp CB$. Aflați P_{ABCD}, știind că $CD = 7$ cm și că lungimea liniei mijlocii a trapezului este de 16 cm.

32. Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$ $(AB \parallel CD,\ DA \perp AB)$ în care $AC \perp CB$. Aflați P_{ABCD}, știind că $AB = 8\sqrt{3}$ cm și $CD = 6\sqrt{3}$ cm.

33. Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$ $(AB \parallel CD,\ DA \perp AB)$ în care $AB = 2CD$, $BC = 10$ cm și $AD = 8$ cm. Aflați lungimea fiecăreia dintre diagonalele trapezului.

34. Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$ $(AB \parallel CD,\ DA \perp AB)$ în care $AB = 8$ cm, $AD = 4$ cm, iar $[BD$ este bisectoarea unghiului ABC. Aflați P_{ABCD}.

35. Aflați lungimea înălțimii trapezului $ABCD$ $(AB \parallel CD)$, știind că $AB = 7$ cm, $BC = \sqrt{17}$ cm și $CD = DA = 3$ cm.

36. Fie dreptunghiul $ABCD$, $E = \underset{BD}{pr}A$ și $F = \underset{BD}{pr}C$. Aflați perimetrul dreptunghiului, știind că $AD = EF = 4$ cm.

37. Aflați perimetrul triunghiului isoscel ABC $([AB] \equiv [AC])$, știind că $AB = 2\sqrt{3}$ cm și că $m(\hat{A}) = 150°$.

38. Aflați perimetrul triunghiului ascuțitunghic ABC, știind că $AC = 2\sqrt{21}$ cm, $BC = 8$ cm și $m(\hat{B}) = 60°$.

39. Aflați perimetrul triunghiului ABC, știind că $AB = 8$ cm, $m(\hat{A}) = 15°$ și $m(\hat{B}) = 30°$.

40. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$ în care $AB = 2\sqrt{3}$ cm și $m(\hat{B}) = 60°$. Fie D mijlocul lui $[BC]$, E un punct pe (AC) astfel încât $3AE = AC$ și $\{F\} = AD \cap BE$. Calculați distanța EF.

41. Fie triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$ și D intersecția bisectoarei unghiului ABC cu latura AC. Aflați P_{ABC}, știind că $DA = 9$ cm și $DC = 15$ cm.

42. Fie triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$ și D intersecția bisectoarei unghiului BAC cu latura BC. Aflați P_{ABC}, știind că $AC = 14$ cm și $AD = 6\sqrt{2}$ cm.

43. Fie triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$, D intersecția bisectoarei unghiului ABC cu latura AC și E intersecția perpendicularei în D pe BD cu dreapta AB. Aflați distanța AE, știind că $AC = 24$ cm și $BC = 30$ cm.

44. Fie dreptunghiul $ABCD$ și E intersecția perpendicularei din A pe BD cu dreapta BC. Arătați că $BE = \dfrac{AB^2}{BC}$.

Scanned with OKEN Scanner

45. Fie triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$ și D un punct pe (BC). Arătați că $DB^2 \cdot AC^2 + DC^2 \cdot AB^2 = DA^2 \cdot BC^2$.
Indicație. Ducem $DE \parallel AB$, $DF \parallel AC$ $(E \in AC,\ F \in AB)$ și, apoi, folosim triunghiuri asemenea.

46. Fie triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$, D mijlocul lui $[BC]$ și E intersecția perpendicularei în D pe BC cu dreapta AB. Aflați distanța EC, știind că $AC = 6$ cm și $AD = 5$ cm.

47. Se consideră trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ în care $AC \perp BD$. Aflați P_{ABCD}, știind că $AB = 12$ cm, $CD = 4$ cm și $BD = 8$ cm.

48. Lungimile laturilor unui triunghi sunt invers proporționale cu numerele 3, $2\sqrt{3}$ și 6. Aflați măsura fiecăruia dintre unghiurile triunghiului.

49. Aflați aria triunghiului ABC, știind că $\frac{BC}{8,5} = \frac{CA}{7,5} = \frac{AB}{4}$ și că $P_{ABC} = 40$ cm.

50. Se consideră triunghiul ABC în care $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm și $CA = 8$ cm. Fie D intersecția bisectoarei unghiului ABC cu latura AC. Aflați lungimea segmentului BD.

51. Aflați perimetrul trapezului isoscel $ABCD$ $(AB \parallel CD)$, știind că $AB = 6$ cm, $BC = 2\sqrt{3}$ cm și $CA = 2\sqrt{6}$ cm.

52. Fie triunghiul ABC, D intersecția bisectoarei unghiului BAC cu latura BC și $E = pr_{AC}B$. Aflați distanțele AD și BE, știind că $BD = 3$ cm, $CD = 5$ cm și $P_{ABC} = 24$ cm.

53. Fie pătratul $ABCD$, $\{O\} = AC \cap BD$, E mijlocul lui $[CD]$ și F mijlocul lui $[OA]$. Arătați că $EF \perp FB$.

54. Aflați perimetrul trapezului isoscel $ABCD$ $(AB \parallel CD)$, știind că $AC = 17$ cm, $AD = 13$ cm și $\frac{CD}{AB} = \frac{5}{12}$.

55. Se consideră trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ în care $AB = 10$ cm, $BC = CD = 3,75$ cm și $DA = 5$ cm. Arătați că $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = 90°$.

Indicație. Fie $\{E\} = AD \cap BC$. Din asemănări de triunghiuri se determină lungimea fiecăruia dintre segmentele EA și EB.

RĂSPUNSURI

2. $24 + 8\sqrt{3}$ cm **3.** $36 + 12\sqrt{3}$ cm **4.** 60 cm **6.** 60 cm **7.** 6 cm^2 **8.** $AB = 13$ cm, $AC = 31,2$ cm **9.** 24 cm^2 **10.** 5 cm **13.** $\frac{120}{13}$ cm **14.** 30 cm **15.** $18\sqrt{3}$ cm^2 **16.** 24 cm **17.** $12 + 4\sqrt{3}$ cm **18.** $6\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$ cm **19.** $12 + 6\sqrt{3}$ cm **20.** $9\sqrt{5}$ cm **21.** $12 + 4\sqrt{3}$ cm **22.** $18 + 6\sqrt{3}$ cm **23.** $6 + 6\sqrt{3}$ cm **25.** $m(\hat{A}) = 75°$, $m(\hat{B}) = 45°$ **26.** $12 + 12\sqrt{3}$ cm **27.** $AC = 8\sqrt{3}$ cm, $BD = 8$ cm **28.** $AC = 6\sqrt{7}$ cm, $BD = 6\sqrt{3}$ cm **29.** 60 cm **30.** $6\sqrt{5}$ cm **31.** 62 cm **32.** $6 + 18\sqrt{3}$ cm **33.** $AC = 10$ cm, $BD = 4\sqrt{13}$ cm **34.** 22 cm **35.** $2\sqrt{2}$ cm **36.** $8 + 8\sqrt{3}$ cm **37.** $3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + \sqrt{6}$ cm **38.** $18 + 2\sqrt{21}$ cm **39.** $4 + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$ cm **40.** 1 cm **41.** 72 cm **42.** 42 cm **43.** 4,5 cm **46.** 6,25 cm **47.** $16 + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{7}$ cm **48.** 30°, 60°, 90° **49.** 60 cm^2 **50.** $3\sqrt{5}$ cm **51.** $8 + 4\sqrt{3}$ cm **52.** $AD = 3\sqrt{3}$ cm, $BE = 4,8$ cm **54.** $26 + 17\sqrt{2}$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME REZOLVATE

1. **Calculați:**
   a) $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$;
   b) $3\sin 30^\circ \sin 45^\circ \sin 60^\circ + 5\cos 30^\circ \cos 45^\circ \cos 60^\circ$;
   c) $\operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{ctg} 30^\circ \operatorname{ctg} 60^\circ$;
   d) $\dfrac{\operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ}{1 + \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 45^\circ}$.

Soluție

a) Deoarece $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, iar $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, rezultă că $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ = 1$.

b) Remarcând și faptul că $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, deducem că $3\sin 30^\circ \sin 45^\circ \sin 60^\circ + 5\cos 30^\circ \cos 45^\circ \cos 60^\circ = \sqrt{6}$.

c) Întrucât $\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ și $\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$, rezultă că $\operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{ctg} 30^\circ \operatorname{ctg} 60^\circ = 0$.

d) Ținând seama și de faptul că $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, deducem că $\dfrac{\operatorname{tg} 30^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ}{1 + \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 45^\circ} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = -\dfrac{(1-\sqrt{3})^2}{2} = -2+\sqrt{3}$.

2. **Determinați perimetrul triunghiului dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90^\circ$) în fiecare dintre situațiile:**
   1) $AB = 3$ cm și $\cos B = \frac{3}{5}$;
   2) $AB = 4$ cm și $\sin B = \frac{\sqrt{5}}{3}$;
   3) $AC = 2$ cm și $\cos B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$;
   4) $BC = 2\sqrt{5}$ cm și $2\cos B = \cos C$;
   5) $BC = 6$ cm și $\operatorname{tg} B = 3\operatorname{tg} C$.

Soluție

Fie $a = BC$, $b = CA$ și $c = AB$.

1) Deoarece $\cos B = \frac{c}{a}$, iar $\cos B = \frac{3}{5}$ și $c = 3$ cm, rezultă că $a = 5$ cm. Remarcând și faptul că $b^2 = a^2 - c^2$, deducem că $b = 4$ cm. Prin urmare, $P_{ABC} = 12$ cm.

2) Întrucât $\cos^2 B + \sin^2 B = 1$ și $\sin B = \frac{\sqrt{5}}{3}$, rezultă că $\cos B = \frac{2}{3}$ (căci $\cos B > 0$). Cum $\cos B = \frac{c}{a}$ și $c = 4$ cm, rezultă că $a = 6$ cm. Drept urmare, $b = 2\sqrt{5}$ cm (fiindcă $b^2 = a^2 - c^2$), iar $P_{ABC} = 10 + 2\sqrt{5}$ cm.

3) Deoarece $\cos^2 B + \sin^2 B = 1$ și $\cos B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, rezultă că $\sin B = \frac{1}{3}$. Totodată, $\sin B = \frac{b}{a}$ și $b = 2$ cm, deci $a = 6$ cm. Remarcând și faptul că $c = 4\sqrt{2}$ cm (căci $c^2 = a^2 - b^2$), deducem că $P_{ABC} = 8 + 4\sqrt{2}$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

4) Întrucât $2\cos B = \cos C$, iar $\cos B = \frac{c}{a}$ și $\cos C = \frac{b}{a}$, rezultă că $2c = b$. Pe de altă parte, $b^2 + c^2 = a^2$ și $a = 2\sqrt{5}$ cm, deci $5c^2 = 20$, de unde $c = 2$ cm și $b = 4$ cm. În consecință, $P_{ABC} = 6 + 2\sqrt{5}$ cm.

5) Având în vedere că $\operatorname{tg} B = 3\operatorname{tg} C$, iar $\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}$ și $\operatorname{tg} C = \frac{c}{b}$, deducem că $\frac{b}{c} = \frac{3c}{b}$, de unde $b^2 = 3c^2$. Totodată, $b^2 + c^2 = a^2$ și $a = 6$ cm, deci $4c^2 = 36$, de unde $c = 3$ cm. Rezultă că $b = 3\sqrt{3}$ cm, iar $P_{ABC} = 9 + 3\sqrt{3}$ cm.

3. Aflați măsura fiecăruia dintre unghiurile triunghiului ascuțitunghic ABC, știind că $AB = 6\sqrt{2}$ cm, $AC = 4\sqrt{3}$ cm și $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soluție

Deoarece $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și $m(\hat{B}) < 90°$, rezultă că $m(\hat{B}) = 45°$. Fie $AD \perp BC$ $(D \in BC)$. Cum $\sin B = \frac{AD}{AB}$ (în triunghiul dreptunghic ABD), rezultă că $AD = AB \sin B = 6$ cm. Remarcând faptul că $\sin C = \frac{AD}{AC}$ (în triunghiul ACD), deducem că $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$, de unde $m(\hat{C}) = 60°$ (căci $m(\hat{C}) < 90°$). Drept urmare, $m(\hat{A}) = 75°$.

4. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC și $AD \perp BC$ $(D \in BC)$. Aflați perimetrul triunghiului ABC, știind că $AD = 6\sqrt{2}$ cm, $\sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ și $\cos C = \frac{\sqrt{7}}{5}$.

Soluție

Remarcăm, mai întâi, că $D \in (BC)$.

Întrucât $\sin B = \frac{AD}{AB}$ (din triunghiul dreptunghic ABD), rezultă că $AB = \frac{AD}{\sin B} = 9$ cm. Totodată, $BD^2 = AB^2 - AD^2$, deci $BD = 3$ cm. Din faptul că $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$, iar $\cos C = \frac{\sqrt{7}}{5}$ deducem că $\sin C = \frac{3\sqrt{2}}{5}$, ceea ce, împreună cu $\sin C = \frac{AD}{AC}$, conduce la $AC = 10$ cm. Cum $CD^2 = AC^2 - AD^2$, rezultă că $CD = 2\sqrt{7}$ cm și, deci, $BC = 3 + 2\sqrt{7}$ cm (căci $BC = BD + DC$). Ca urmare a celor stabilite anterior, $P_{ABC} = 22 + 2\sqrt{7}$ cm.

5. Aflați perimetrul triunghiului ascuțitunghic ABC, știind că $AB = 10$ cm, $\cos B = \frac{3}{5}$ și $\sin C = \frac{8}{17}$.

Soluție

Fie $AD \perp BC$ $(D \in BC)$. Deoarece triunghiul ABC este ascuțitunghic, rezultă că $D \in (BC)$. Întrucât $\cos B = \frac{BD}{AB}$ (în triunghiul dreptunghic ABD), rezultă că $BD = AB \cos B = 6$ cm. Totodată, $AD^2 = AB^2 - BD^2$, deci $AD = 8$ cm. Remarcând faptul că $\sin C = \frac{AD}{AC}$ (în triunghiul dreptunghic ACD), deducem că

Scanned with OKEN Scanner

$AC = \frac{AD}{\sin C} = 17$ cm. Pe de altă parte, $DC^2 = AC^2 - AD^2$, ceea ce conduce la $DC = 15$ cm. Cum $BC = BD + DC = 21$ cm, conchidem că $P_{ABC} = 48$ cm.

6. **Se consideră triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) în care $AB = 10$ cm și $\operatorname{tg} B = \frac{4}{3}$. Aflați lungimea laturii BC.**

Soluție

Fie $AD \perp BC$ ($D \in BC$). Întrucât $\operatorname{tg} B = \frac{AD}{BD}$ (în triunghiul dreptunghic ABD), rezultă că $\frac{AD}{BD} = \frac{4}{3}$, de unde $AD = 4k$ și $BD = 3k$ ($k > 0$). Având în vedere că $AD^2 + BD^2 = AB^2$, deducem că $25k^2 = 100$, ceea ce conduce la $k = 2$, de unde $BD = 6$ cm. Cum $BC = 2BD$, rezultă că $BC = 12$ cm.

7. **Se consideră rombul $ABCD$ în care $AB = 13$ cm și $\operatorname{tg} \widehat{ABD} = 2{,}4$. Aflați $AC + BD$.**

Soluție

Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Deoarece $m(\widehat{AOB}) = 90°$, rezultă că $\operatorname{tg} \widehat{ABO} = \frac{AO}{BO}$, de unde $\frac{AO}{BO} = 2{,}4$, ceea ce este totuna cu $\frac{AO}{BO} = \frac{12}{5}$. Prin urmare, $AO = 12k$ și $BO = 5k$ ($k > 0$). Remarcând și faptul că $AO^2 + BO^2 = AB^2$, deducem că $169k^2 = 169$, de unde $k = 1$, ceea ce implică $AO = 12$ cm și $BO = 5$ cm. Cum $AC = 2AO$ și $BD = 2BO$, rezultă că $AC + BD = 34$ cm.

8. **Se consideră triunghiul ABC în care $m(\hat{B}) < 90°$ și $m(\hat{C}) < 90°$. Fie $AD \perp BC$ ($D \in BC$). Arătați că, dacă $AB = 15$ cm, $AC = 20$ cm și $AD = 12$ cm, atunci $\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = 1$.**

Soluție

Întrucât $BD^2 = AB^2 - AD^2$, iar $CD^2 = AC^2 - AD^2$, rezultă că $BD = 9$ cm, respectiv $CD = 16$ cm. Remarcând și faptul că $\operatorname{tg} B = \frac{AD}{BD}$ (în triunghiul dreptunghic ABD), iar $\operatorname{tg} C = \frac{AD}{CD}$ (în triunghiul dreptunghic ACD), deducem că $\operatorname{tg} B = \frac{4}{3}$, respectiv $\operatorname{tg} C = \frac{3}{4}$ și, deci, $\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = 1$.

9. **Fie O centrul dreptunghiului $ABCD$. Aflați $\sin \widehat{AOD}$, știind că $AB = 4\sqrt{5}$ cm și $BC = 2\sqrt{5}$ cm.**

Soluție

Deoarece $AC^2 = AB^2 + BC^2$, rezultă că $AC = 10$ cm. Fie $DE \perp AC$ ($E \in AC$). Remarcând faptul că $m(\widehat{ADC}) = 90°$, iar $E = pr_{AC} D$, deducem că $DE = \frac{AD \cdot DC}{AC}$, de unde $DE = 4$ cm. Cum $\sin \widehat{EOD} = \frac{DE}{DO}$ (în triunghiul dreptunghic DEO), rezultă că $\sin \widehat{EOD} = 0{,}8$ (căci $DO = \frac{DB}{2} = \frac{AC}{2} = 5$ cm), ceea ce este totuna cu $\sin \widehat{AOD} = 0{,}8$.

10. **Fie triunghiul ascuțitunghic ABC în care $AB = 13$ cm, $BC = 21$ cm și $CA = 20$ cm. Arătați că $\sin B = 3 \cos B \cdot \cos C$.**

Scanned with OKEN Scanner

Soluție

Fie $AD \perp BC$ ($D \in BC$) și $x = BD$. Cum $D \in (BC)$, rezultă că $CD = BC - BD = 21 - x$. Întrucât $AD^2 = AB^2 - BD^2$ (în triunghiul dreptunghic ABD) și $AD^2 = AC^2 - CD^2$ (în triunghiul dreptunghic ACD), rezultă că $AD^2 = 169 - x^2$, respectiv $AD^2 = 400 - (21 - x)^2$. Drept urmare, $169 - x^2 = 400 - (21 - x)^2$, de unde $x = 5$. Prin urmare, $BD = 5$ cm și $CD = 16$ cm. Remarcăm și faptul că $AD = 12$ cm. Având în vedere că $\sin B = \frac{AD}{AB} = \frac{12}{13}$, $\cos B = \frac{BD}{AB} = \frac{5}{13}$ (în triunghiul dreptunghic ABD) și $\cos C = \frac{CD}{CA} = \frac{4}{5}$ (în triunghiul dreptunghic ACD), deducem că $\sin B = 3\cos B \cdot \cos C$.

11. Se consideră triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) în care $m(\hat{A}) < 90°$, $BC = 10$ cm și $\cos B = 0{,}6$. Aflați $\sin A$.

Soluție

Fie $AD \perp BC$ și $CE \perp AB$ ($D \in BC$, $E \in AB$).

Deoarece $\cos B = \frac{BE}{BC}$ (în triunghiul dreptunghic BCE), rezultă că $\frac{BE}{10} = 0{,}6$, de unde $BE = 6$ cm. Totodată, $EC^2 = BC^2 - BE^2$, deci $CE = 8$ cm. Remarcăm și faptul că $BD = \frac{BC}{2} = 5$ cm. Având în vedere că $\cos B = \frac{BD}{AB}$ (în triunghiul ABD), deducem că $AB = \frac{25}{3}$ cm, de unde $AC = \frac{25}{3}$ cm. Întrucât $\sin \widehat{EAC} = \frac{CE}{AC}$ (în triunghiul AEC), rezultă că $\sin \widehat{EAC} = \frac{24}{25}$, ceea ce este totuna cu $\sin A = \frac{24}{25}$.

12. Se consideră triunghiul isoscel ABC în care $AB = AC = 2$ cm și $m(\hat{A}) = 45°$. Aflați lungimea laturii BC și, apoi, calculați $\sin 22°30'$.

Soluție

Fie $BD \perp AC$ ($D \in AC$). Cum $m(\widehat{BAD}) = 45°$, rezultă că $m(\widehat{ABD}) = 45°$, deci $[BD] \equiv [AD]$. Remarcând și faptul că $BD^2 + AD^2 = AB^2$, deducem că $BD = AD = \sqrt{2}$ cm. Deoarece $CD = 2 - \sqrt{2}$ cm (căci $CD = AC - AD$), iar $BC^2 = BD^2 + CD^2$, rezultă că $BC = 2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ cm.

Fie $AE \perp BC$ ($E \in BC$). Întrucât $[AB] \equiv [AC]$, rezultă că $\widehat{BAE} \equiv \widehat{CAE}$ și $[EC] \equiv [EB]$, ceea ce implică $m(\widehat{BAE}) = 22°30'$, iar $BE = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ cm. Ținând seama și de faptul că $\sin \widehat{BAE} = \frac{BE}{AB}$, deducem că $\sin 22°30' = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.

13. Se consideră triunghiul isoscel ABC în care $AB = AC = 2$ cm și $m(\hat{A}) = 150°$. Aflați lungimea laturii BC și, apoi, calculați $\sin 15°$.

Soluție

Fie $BD \perp CA$ ($D \in CA$). Deoarece $m(\hat{C}) < 90°$ și $m(\hat{A}) > 90°$, rezultă că $A \in (DC)$. Din faptul că $m(\widehat{BAD}) = 180° - m(\widehat{BAC})$, deducem că $m(\widehat{BAD}) = 30°$. Drept urmare, $BD = 1$ cm (căci $BD = \frac{AB}{2}$) și $AD = \sqrt{3}$ (fiindcă $AD^2 = AB^2 - BD^2$). Cum $CD = AC + AD$, rezultă că $CD = 2 + \sqrt{3}$ cm. Totodată, $BC^2 = CD^2 + DA^2$.

Scanned with OKEN Scanner

ceea ce conduce la $BC^2 = 2(4+2\sqrt{3})$, de unde $BC = \sqrt{2}(\sqrt{3}+1) = \sqrt{6}+\sqrt{2}$ cm (pentru că $4+2\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^2$). Întrucât $\hat{B} \equiv \hat{C}$ și $m(\hat{A}) = 150°$, rezultă că $m(\hat{C}) = 15°$. Ținând seama și de faptul că $\sin\widehat{BCD} = \frac{BD}{BC}$ (în triunghiul dreptunghic BCD), deducem că $\sin 15° = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

14. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$ în care $AB = 2$ cm și $m(\hat{B}) = 60°$. Fie D intersecția bisectoarei unghiului ACB cu latura AB. Determinați distanța AD și, apoi, calculați $\operatorname{tg} 15°$.

Soluție

Deoarece $m(\hat{A}) = 90°$ și $m(\hat{C}) = 30°$, rezultă că $BC = 2AB = 4$ cm. Totodată, $AC^2 = BC^2 - AB^2$, de unde $AC = 2\sqrt{3}$ cm. Ținând seama și de faptul că $\frac{DA}{DB} = \frac{AC}{BC}$, deducem că $\frac{DA}{DB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ceea ce conduce la $\frac{DA}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$, de unde $DA = \frac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ cm. Cum $\operatorname{tg}\widehat{ACD} = \frac{AD}{AC}$ (în triunghiul dreptunghic ACD), rezultă că $\operatorname{tg} 15° = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$.

15. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$. Arătați că $[AB] \equiv [AC]$ dacă și numai dacă $\sin B + \sin C = \sqrt{2}$.

Soluție

Fie $a = BC$, $b = CA$ și $c = AB$.

1) Să demonstrăm implicația: dacă $[AB] \equiv [AC]$, atunci $\sin B + \sin C = \sqrt{2}$. Deoarece $b^2 + c^2 = a^2$ (căci $m(\hat{A}) = 90°$) și $b = c$, rezultă că $b = c = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, de unde $\sin B = \sin C = \frac{c}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, deci $\sin B + \sin C = \sqrt{2}$.

2) Să demonstrăm implicația: dacă $\sin B + \sin C = \sqrt{2}$, atunci $[AB] \equiv [AC]$. Întrucât $\sin B = \frac{b}{a}$ și $\sin C = \frac{c}{a}$, condiția problemei conduce la $b + c = a\sqrt{2}$, de unde $(b+c)^2 = 2a^2$. Ținând seama și de faptul că $a^2 = b^2 + c^2$, egalitatea anterioară devine $b^2 + 2bc + c^2 = 2b^2 + 2c^2$, de unde $(b-c)^2 = 0$, deci $b = c$, ceea ce implică $[AC] \equiv [AB]$.

PROBLEME PROPUSE

1. Calculați:
   a) $\cos 60° \cos 30° + \sin 60° \sin 30°$;
   b) $\sin 45° \cos 30° - \sin 30° \cos 45°$;
   c) $\operatorname{tg} 45° \operatorname{ctg} 30° - \operatorname{ctg} 45° \operatorname{tg} 30°$;
   d) $\frac{\operatorname{tg} 60° + \operatorname{tg} 45°}{1 - \operatorname{tg} 60° \operatorname{tg} 45°}$.

2. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$ în care $AB = 2\sqrt{2}$ cm și $BC = 3$ cm. Aflați valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiului ABC.

Scanned with OKEN Scanner

3. Determinați perimetrul triunghiului ABC ($m(\hat{A}) \neq 90°$) în fiecare din următoarele situații:

a) $AC = 8$ cm și $\sin B = \frac{4}{5}$;

b) $AC = 4\sqrt{2}$ cm și $\cos B = \frac{1}{3}$;

c) $AB = 2\sqrt{5}$ cm și $\cos C = \frac{2}{3}$;

d) $BC = 2\sqrt{10}$ cm și $3\sin C = \sin B$;

e) $BC = 3\sqrt{5}$ cm și $\operatorname{tg} C = 4\operatorname{tg} B$.

4. Se consideră trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB > CD$) în care $BC = 15$ cm, $CD = 6$ cm, $DA = 13$ cm și $\cos A = \frac{5}{13}$. Aflați lungimea laturii AB.

5. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ascuțitunghic ABC, știind că $AB = 6$ cm, $AC = 3\sqrt{6}$ cm și $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC și $AD \perp BC$ ($D \in BC$). Aflați P_{ABC}, știind că $AD = 6\sqrt{2}$ cm, $\cos B = \frac{1}{3}$ și $\sin C = \frac{3\sqrt{2}}{5}$.

7. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC și $AD \perp BC$ ($D \in BC$). Aflați P_{ABC}, știind că $AD = 6\sqrt{3}$ cm, $\operatorname{tg} B = 2$ și $\sin C = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

8. Aflați perimetrul triunghiul ascuțitunghic ABC, știind că $AB = 9$ cm, $\cos B = \frac{1}{3}$ și $\operatorname{tg} C = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$.

9. Aflați perimetrul triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) în care $AB = 26$ cm și $\operatorname{tg} B = \frac{5}{12}$.

10. Se consideră rombul $ABCD$ în care $AB = 17$ cm și $\operatorname{tg} \widehat{ABD} = 0,5(3)$. Aflați $AC + BD$.

11. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC și $AD \perp BC$ ($D \in BC$). Arătați că, dacă $AB = 8\sqrt{3}$ cm, $AC = 15$ cm și $CD = 9$ cm, atunci $\cos^2 B + \operatorname{ctg} C = 1$.

12. Se consideră triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) în care $BC = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ cm și $m(\hat{A}) = 150°$. Aflați lungimea laturii AB și, apoi, calculați $\cos 15°$.

RĂSPUNSURI

1. a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; d) $-2-\sqrt{3}$ 2. $\sin B = \frac{1}{3}$, $\cos B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg} B = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{ctg} B = 2\sqrt{2}$ 3. a) 24 cm; b) $8+4\sqrt{2}$ cm; c) $10+2\sqrt{5}$ cm; d) $8+2\sqrt{10}$ cm; e) $9+3\sqrt{5}$ cm 4. 20 cm 5. 45°, 60°, 75° 6. $22+2\sqrt{7}$ cm 7. $18+3\sqrt{3}+6\sqrt{6}+3\sqrt{15}$ cm 8. $22+2\sqrt{7}$ cm 9. 100 cm 10. 46 cm 12. $AB = 2$ cm, $\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL IX

ARII

PROBLEME REZOLVATE

1. **a) Arătați că oricare dintre medianele unui triunghi împarte triunghiul în două triunghiuri echivalente.**
b) Fie triunghiul ABC, D mijlocul lui $[BC]$ și E mijlocul lui $[AD]$. Aflați $\mathcal{A}[ABC]$, știind că $\mathcal{A}[ABE] = 8\ \text{cm}^2$.

Soluție

a) Fie ABC triunghiul considerat în enunț, M mijlocul lui $[BC]$ și $AD \perp BC$ $(D \in BC)$. Atunci, $\mathcal{A}[ABC] = \frac{BC \cdot AD}{2}$ și $\mathcal{A}[ABM] = \frac{BM \cdot AD}{2}$. Cum $BM = \frac{BC}{2}$, rezultă că $\mathcal{A}[ABM] = \frac{BC \cdot AD}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{1}{2}\mathcal{A}[ABC]$. Deci, $\mathcal{A}[ABM] = \mathcal{A}[ACM]$.

b) Deoarece $[BE]$ este mediană în triunghiul ABD, rezultă că $\mathcal{A}[ABD] = 2\mathcal{A}[ABE]$, de unde $\mathcal{A}[ABD] = 16\ \text{cm}^2$. Remarcând faptul că $[AD]$ este mediană în triunghiul ABC, deducem că $\mathcal{A}[ABC] = 2\mathcal{A}[ABD]$, deci $\mathcal{A}[ABC] = 32\ \text{cm}^2$.

2. **Se consideră triunghiul ABC. Fie D simetricul lui A față de B, E simetricul lui D față de C și F simetricul lui E față de A. Arătați că $\mathcal{A}[DEF] = 8\mathcal{A}[ABC]$.**

Soluție

Deoarece $[CB]$ este mediană în triunghiul ACD (căci $[BD] \equiv [BA]$), rezultă că $\mathcal{A}[ACD] = 2\mathcal{A}[ABC]$. Având în vedere că $[AC]$ este mediană în triunghiul ADE (fiindcă $[CD] \equiv [CE]$), deducem că $\mathcal{A}[ADE] = 2\mathcal{A}[ACD]$. Drept urmare, $\mathcal{A}[ADE] = 4\mathcal{A}[ABC]$. Întrucât $[DA]$ este mediană în triunghiul DEF (pentru că $[AE] \equiv [AF]$), rezultă că $\mathcal{A}[DEF] = 2\mathcal{A}[ADE]$. Deci, $\mathcal{A}[DEF] = 8\mathcal{A}[ABC]$.

3. **Se consideră triunghiul ABC. Fie D simetricul lui A față de B, E simetricul lui B față de C și F simetricul lui C față de A. Arătați că $\mathcal{A}[DEF] = 7\mathcal{A}[ABC]$.**

Soluție

Întrucât $[CB]$ este mediană în triunghiul CAD (căci $[BD] \equiv [BA]$), rezultă că $\mathcal{A}[DBC] = \mathcal{A}[ABC]$. Având în vedere că $[DC]$ este mediană în triunghiul DBE, deducem că $\mathcal{A}[DBE] = 2\mathcal{A}[DBC]$. Drept urmare, $\mathcal{A}[DBE] = 2\mathcal{A}[ABC]$. Analog, arătăm că $\mathcal{A}[ECF] = 2\mathcal{A}[ABC]$ și $\mathcal{A}[FAD] = 2\mathcal{A}[ABC]$. Evidențiind și faptul că $\mathcal{A}[DEF] = \mathcal{A}[DBE] + \mathcal{A}[ECF] + \mathcal{A}[FAD] + \mathcal{A}[ABC]$, concluzionăm că $\mathcal{A}[DEF] = 7\mathcal{A}[ABC]$.

Scanned with OKEN Scanner

4. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ascuțitunghic ABC, $OD \perp BC$, $OE \perp CA$ și $OF \perp AB$ ($D \in BC$, $E \in CA$, $F \in AB$). Arătați că $\mathcal{A}[OBD]+\mathcal{A}[OCE]+\mathcal{A}[OAF]=\frac{\mathcal{A}[ABC]}{2}$.

Soluție

Deoarece $[OB] \equiv [OC]$ și $OD \perp BC$, rezultă că $[DB] \equiv [DC]$. Prin urmare, $[OD]$ este mediană în triunghiul OBC, de unde $\mathcal{A}[OBD]=\frac{\mathcal{A}[OBC]}{2}$. Analog, arătăm că $\mathcal{A}[OCE]=\frac{\mathcal{A}[OCA]}{2}$ și $\mathcal{A}[OAF]=\frac{\mathcal{A}[OAB]}{2}$. Având în vedere că punctul O este situat în interiorul triunghiului ABC, deducem că $\mathcal{A}[OBC]+\mathcal{A}[OCA]+\mathcal{A}[OAB]=\mathcal{A}[ABC]$. Ca urmare a celor stabilite anterior, conchidem că $\mathcal{A}[OBD]+\mathcal{A}[OCE]+\mathcal{A}[OAF]=\frac{\mathcal{A}[OBC]+\mathcal{A}[OCA]+\mathcal{A}[OAB]}{2}=\frac{\mathcal{A}[ABC]}{2}$.

5. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Arătați că

$$\mathcal{A}[GBC]=\mathcal{A}[GCA]=\mathcal{A}[GAB]=\frac{1}{3}\mathcal{A}[ABC].$$

Soluție

Fie D mijlocul lui $[BC]$ și $BE \perp AD$ ($E \in AD$). Remarcăm, mai întâi, că $G \in AD$ și $GD=\frac{AD}{3}$. Totodată, $\mathcal{A}[GBC]=2\mathcal{A}[GBD]$ și $\mathcal{A}[ABD]=\frac{1}{2}\mathcal{A}[ABC]$. Având în vedere că $\mathcal{A}[GBD]=\frac{GD \cdot BE}{2}$, $\mathcal{A}[ABD]=\frac{AD \cdot BE}{2}$ și $GD=\frac{AD}{3}$, deducem că $\mathcal{A}[GBD]=\frac{1}{3}\mathcal{A}[ABD]$. Drept urmare, $\mathcal{A}[GBC]=\frac{2}{3}\mathcal{A}[ABD]=\frac{1}{3}\mathcal{A}[ABC]$. Analog, arătăm că $\mathcal{A}[GCA]=\frac{1}{3}\mathcal{A}[ABC]$ și $\mathcal{A}[GAB]=\frac{1}{3}\mathcal{A}[ABC]$.

6. Se consideră pătratul $ABCD$. Fie $\{O\}=AC \cap BD$, E mijlocul lui $[AB]$ și $\{F\}=CE \cap BD$. Aflați $\mathcal{P}_{ABCD}$, știind că $\mathcal{A}[BEF]=3\text{cm}^2$.

Soluție

Întrucât $[CE]$ și $[BO]$ sunt mediane în triunghiul ABC, iar $\{F\}=CE \cap BO$, rezultă că F este centrul de greutate al triunghiului, de unde $EF=\frac{1}{3}CE$, ceea ce implică $\mathcal{A}[BEF]=\frac{1}{3}\mathcal{A}[BCE]$. Drept urmare, $\mathcal{A}[BCE]=9\text{cm}^2$. Având în vedere că $\mathcal{A}[ABCD]=4\mathcal{A}[BCE]$ (căci $\mathcal{A}[ABCD]=2\mathcal{A}[ABC]$, iar $\mathcal{A}[ABC]=2\mathcal{A}[BCE]$), deducem că $\mathcal{A}[ABCD]=4 \cdot 9=36\text{cm}^2$. Totodată, $\mathcal{A}[ABCD]=AB^2$. Rezultă că $AB^2=36$, de unde $AB=6\text{cm}$. Prin urmare, $\mathcal{P}_{ABCD}=4 \cdot 6=24\text{cm}$.

7. Fie triunghiul ABC, E mijlocul lui $[AC]$, F mijlocul lui $[AB]$ și $\{G\}=BE \cap CF$. Aflați $\mathcal{A}[ABC]$, știind că $BE=9$ cm, $CF=12$ cm și că $[AG] \equiv [BC]$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție

Fie $\{D\} = AG \cap BC$. Deoarece G este centrul de greutate al triunghiului ABC, rezultă că D este mijlocul lui $[BC]$. Totodată, $GD = \frac{1}{2}AG$, deci $GD = \frac{1}{2}BC$. Drept urmare, $m(\widehat{BGC}) = 90°$, ceea ce conduce la $\mathcal{A}[GBC] = \frac{BG \cdot CG}{2}$. Ținând seama și de faptul că $BG = \frac{2BE}{3} = 6$ cm și $CG = \frac{2CF}{3} = 8$ cm, deducem că $\mathcal{A}[GBC] = 24$ cm^2. Pe de altă parte, $\mathcal{A}[ABC] = 3\mathcal{A}[GBC]$, deci $\mathcal{A}[ABC] = 72$ cm^2.

8. Fie triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90°$) și $AD \perp BC$. Arătați că, dacă $BC = 2AB$, atunci $\mathcal{A}[ACD] = 3\mathcal{A}[ABD]$.

Soluție

Întrucât $m(\hat{A}) = 90°$ și $AB = \frac{BC}{2}$, rezultă că $m(\hat{C}) = 30°$, ceea ce implică $m(\widehat{BAD}) = 30°$, de unde $BD = \frac{AB}{2}$ (căci $m(\widehat{ADB}) = 90°$). Drept urmare, $DC = \frac{3AB}{2}$ (fiindcă $DC = BC - BD$), ceea ce arată că $DC = 3BD$. Remarcând și faptul că $\mathcal{A}[ACD] = \frac{DC \cdot AD}{2}$, iar $\mathcal{A}[ABD] = \frac{BD \cdot AD}{2}$, deducem că $\mathcal{A}[ACD] = 3\mathcal{A}[ABD]$.

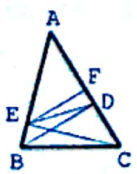
9. Se consideră triunghiul ABC. Fie D mijlocul lui $[BC]$, E mijlocul lui $[AD]$ și $\{F\} = BE \cap AC$. Arătați că $\mathcal{A}[AEF] = \frac{1}{12}\mathcal{A}[ABC]$.

Soluție

Fie M mijlocul lui $[CF]$. Întrucât $[DM]$ este linie mijlocie în triunghiul CBF, rezultă că $DM \parallel BF$, de unde $EF \parallel DM$. Remarcând și faptul că $[AE] \equiv [ED]$, deducem că $[AF] \equiv [FM]$. Prin urmare, $[AF] \equiv [FM] \equiv [MC]$, ceea ce implică $AF = \frac{AC}{3}$. Rezultă că $\mathcal{A}[ABF] = \frac{1}{3}\mathcal{A}[ABC]$. Având în vedere că $[BE]$ este mediană în triunghiul ABD, iar $[AD]$ este mediană în triunghiul ABC, deducem că $\mathcal{A}[ABE] = \frac{1}{2}\mathcal{A}[ABD]$, respectiv $\mathcal{A}[ABD] = \frac{1}{2}\mathcal{A}[ABC]$, ceea ce conduce la $\mathcal{A}[ABE] = \frac{1}{4}\mathcal{A}[ABC]$. Cum $\mathcal{A}[AEF] = \mathcal{A}[ABF] - \mathcal{A}[ABE]$, rezultă că $\mathcal{A}[AEF] = \frac{1}{3}\mathcal{A}[ABC] - \frac{1}{4}\mathcal{A}[ABC] = \frac{1}{12}\mathcal{A}[ABC]$.

10. Se consideră triunghiul ABC în care $m(\hat{A}) = 45°$. Fie $BD \perp AC$ și $CE \perp AB$. Arătați că $\mathcal{A}[ADE] = \frac{1}{2}\mathcal{A}[ABC]$.

Soluție



Întrucât $BD \perp AC$, rezultă că $\mathcal{A}[ABC] = \frac{AC \cdot BD}{2}$. Având în vedere că $[BD] \equiv [AD]$ (căci $m(\widehat{ABD}) = 90°$ și $m(\widehat{BAD}) = 45°$ implică $m(\widehat{ABD}) = 45°$), deducem că $\mathcal{A}[ABC] = \frac{AC \cdot AD}{2}$. Fie $EF \perp AC$ ($F \in AC$). Atunci, $\mathcal{A}[ADE] = \frac{AD \cdot EF}{2}$. Deoarece $[EA] \equiv [EC]$ (fiindcă $m(\widehat{ECA}) = m(\widehat{EAC}) = 45°$), iar $EF \perp AC$, rezultă că $[FA] \equiv [FC]$. Ținând seama și

Scanned with OKEN Scanner

de faptul că $m(\widehat{AEC})=90°$, deducem că $EF=\frac{AC}{2}$. În consecință, $\mathcal{A}[ADE]=\frac{AC\cdot AD}{4}$ și, deci, $\mathcal{A}[ADE]=\frac{\mathcal{A}[ABC]}{2}$.

11. **Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A})=90°$) în care $AB=8\text{cm}$ și $AC=12\text{cm}$. Fie D intersecția bisectoarei unghiului BAC cu latura BC. Aflați lungimea segmentului AD.**

Soluție

Remarcăm, mai întâi, că $\mathcal{A}[ABD]+\mathcal{A}[ACD]=\mathcal{A}[ABC]$. Evidențiind și faptul că $\mathcal{A}[ABD]=\frac{AB\cdot AD}{2}\sin 45°=2\sqrt{2}AD$, $\mathcal{A}[ACD]=\frac{AC\cdot AD}{2}\sin 45°=3\sqrt{2}AD$ și $\mathcal{A}[ABC]=\frac{AB\cdot AC}{2}=48$ (cm^2), deducem că $2\sqrt{2}AD+3\sqrt{2}AD=48$, de unde $AD=\frac{24\sqrt{2}}{5}\text{cm}$.

12. **1) Se consideră triunghiul ABC. Arătați că $\mathcal{A}[ABC]\le\frac{AB\cdot AC}{2}$.**

2) Se consideră patrulaterul convex $ABCD$. Fie $AB=a, BC=b, CD=c$ și $DA=d$. Arătați că $\mathcal{A}[ABCD]\le\frac{1}{4}(a+c)(b+d)$.

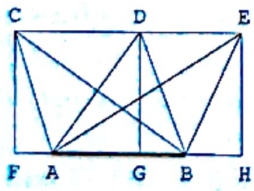
Soluție

1) Deoarece $\mathcal{A}[ABC]=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\sin A$, iar $\sin A\le 1$, rezultă că $\mathcal{A}[ABC]\le\frac{AB\cdot AC}{2}$.

2) Se arată cu ușurință că $\mathcal{A}[ABC]+\mathcal{A}[BCD]+\mathcal{A}[CDA]+\mathcal{A}[DAB]=2\mathcal{A}[ABCD]$, ceea ce implică $\mathcal{A}[ABCD]=\frac{1}{2}(\mathcal{A}[ABC]+\mathcal{A}[BCD]+\mathcal{A}[CDA]+\mathcal{A}[DAB])$. Remarcând și faptul că $\mathcal{A}[ABC]\le\frac{BA\cdot BC}{2}=\frac{ab}{2}$, $\mathcal{A}[BCD]\le\frac{CB\cdot CD}{2}=\frac{bc}{2}$, $\mathcal{A}[CDA]\le\frac{DC\cdot DA}{2}=\frac{cd}{2}$ și $\mathcal{A}[DAB]\le\frac{AD\cdot AB}{2}=\frac{da}{2}$, deducem că $\mathcal{A}[ABCD]\le\frac{1}{4}(ab+bc+cd+da)$. Totodată, $ab+bc+cd+da=a(b+d)+c(b+d)=(a+c)(b+d)$. Deci, $\mathcal{A}[ABCD]\le\frac{1}{4}(a+c)(b+d)$.

13. **Fie segmentul AB și punctele C, D, E situate de aceeași parte a dreptei AB. Arătați că, dacă $\mathcal{A}[CAB]=\mathcal{A}[DAB]=\mathcal{A}[EAB]$, atunci punctele C, D și E sunt coliniare.**

Soluție



Fie $CF\perp AB$, $DG\perp AB$ și $EH\perp AB$ ($F, G, H\in AB$). Întrucât $\mathcal{A}[CAB]=\frac{AB\cdot CF}{2}$, $\mathcal{A}[DAB]=\frac{AB\cdot DG}{2}$, iar $\mathcal{A}[CAB]=\mathcal{A}[DAB]$, rezultă că $[CF]\equiv[DG]$. Totodată, $CF\parallel DG$ și $m(\widehat{CFG})=90°$, deci patrulaterul $CDGF$ este dreptunghi, de unde $CD\parallel FG$, ceea ce este totuna cu $CD\parallel AB$ (căci $F, G\in AB$). Analog, $DE\parallel AB$. Cum printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură paralelă la acea dreaptă, rezultă că $E\in CD$, deci punctele C, D și E sunt coliniare.

14. **Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctul $E\in(BC)$. Fie $\{F\}=AE\cap BD$. Arătați că $\mathcal{A}[FAB]=\mathcal{A}[FDE]$.**

Soluție

Întrucât $AD\parallel BF$, rezultă că $\mathcal{A}[ABE]=\mathcal{A}[DBE]$. Remarcând și faptul că $\mathcal{A}[FAB]=\mathcal{A}[ABE]-\mathcal{A}[FBE]$, iar $\mathcal{A}[FDE]=\mathcal{A}[DBE]-\mathcal{A}[FBE]$, conchidem că $\mathcal{A}[FAB]=\mathcal{A}[FDE]$.

Scanned with OKEN Scanner

15. Fie M un punct situat în interiorul paralelogramului $ABCD$. Arătați că

$$\mathcal{A}[MAB]+\mathcal{A}[MCD]=\mathcal{A}[MBC]+\mathcal{A}[MDA]=\frac{1}{2}\mathcal{A}[ABCD].$$

Soluție

Fie $DE\perp AB, MK\perp AB$ și $ML\perp CD$ ($E,K\in AB, L\in CD$). Atunci, $\mathcal{A}[MAB]+\mathcal{A}[MCD]=$ $=\frac{AB\cdot MK}{2}+\frac{CD\cdot ML}{2}=\frac{AB(MK+ML)}{2}=\frac{AB\cdot KL}{2}$ ($MK\perp AB, ML\perp CD$ și $AB\parallel CD\Rightarrow$ punctele K,M,L sunt coliniare). Totodată, $\mathcal{A}[ABCD]=AB\cdot DE=AB\cdot KL$ (căci $DE=KL$). Prin urmare, $\mathcal{A}[MAB]+\mathcal{A}[MCD]=\frac{\mathcal{A}[ABCD]}{2}$. Remarcând și faptul că $\mathcal{A}[MBC]+$ $+\mathcal{A}[MDA]=\mathcal{A}[ABCD]-(\mathcal{A}[MAB]+\mathcal{A}[MCD])$, deducem că $\mathcal{A}[MBC]+\mathcal{A}[MDA]=\frac{\mathcal{A}[ABCD]}{2}$. Astfel, rezolvarea problemei este încheiată.

16. Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele M,N astfel încât $M\in(BC), N\in(AM)$. Arătați că $\mathcal{A}[DMN]=\mathcal{A}[NBC]$.

Soluție

Fie $ME\perp AD$ și $BF\perp AD$. Atunci, $\mathcal{A}[MAD]=\frac{AD\cdot ME}{2}$ și $\mathcal{A}[ABCD]=AD\cdot BF$ ceea ce, împreună cu $ME=BF$ (căci patrulaterul $MBED$ este dreptunghi) conduce la $\mathcal{A}[MAD]=\frac{\mathcal{A}[ABCD]}{2}$. Remarcând faptul că $\mathcal{A}[DMN]+\mathcal{A}[NAD]=\mathcal{A}[MAD]=$ $=\frac{\mathcal{A}[ABCD]}{2}$, iar $\mathcal{A}[NBC]+\mathcal{A}[NAD]=\frac{\mathcal{A}[ABCD]}{2}$, deducem că $\mathcal{A}[DMN]+\mathcal{A}[NAD]=$ $=\mathcal{A}[NBC]+\mathcal{A}[NAD]$, de unde $\mathcal{A}[DMN]=\mathcal{A}[NBC]$.

17. Fie paralelogramul $ABCD$, $DE\perp AB$ și $DF\perp BC$ ($E\in AB$, $F\in BC$). Aflați $\mathcal{P}_{ABCD}$, știind că $\mathcal{A}[ABCD]=36\text{ cm}^2$, $DE=4\text{ cm}$ și $DF=6\text{ cm}$.

Soluție

Întrucât $\mathcal{A}[ABCD]=2\mathcal{A}[DAB]=DE\cdot AB$ (căci $DE\perp AB$), rezultă că $4AB=36$, de unde $AB=9\text{ cm}$. Remarcând că $\mathcal{A}[ABCD]=2\mathcal{A}[DBC]=DF\cdot BC$, deducem că $6BC=36$, ceea ce implică $BC=6\text{ cm}$. Cum $\mathcal{P}_{ABCD}=2(AB+BC)$, conchidem că $\mathcal{P}_{ABCD}=30\text{ cm}$.

18. Fie O punctul de intersecție a diagonalelor paralelogramului $ABCD$. Aflați $\mathcal{P}_{ABCD}$, știind că $\mathcal{A}[ABCD]=72\text{cm}^2$, $d(O,AB)=4\text{cm}$ și $d(O,BC)=6\text{cm}$.

Soluție

Se arată cu ușurință că $\mathcal{A}[OAB]=\mathcal{A}[OBC]=\frac{\mathcal{A}[ABCD]}{4}=18\text{cm}^2$. Fie $OE\perp AB$ și $OF\perp BC$ ($E\in AB, F\in BC$). Rezultă că $OE=d(O,AB)=4\text{cm}$ și $OF=d(O,BC)=6\text{cm}$. Totodată, $\mathcal{A}[OAB]=\frac{AB\cdot OE}{2}=2AB, \mathcal{A}[OBC]=\frac{BC\cdot OF}{2}=3BC$, ceea ce conduce la $2AB=18$ și $3BC=18$, de unde $AB=9\text{cm}, BC=6\text{cm}$. Cum $\mathcal{P}_{ABCD}=2(AB+BC)$, conchidem că $\mathcal{P}_{ABCD}=30\text{cm}$.

Scanned with OKEN Scanner

19. Se împarte diagonala AC a paralelogramului $ABCD$ în trei segmente congruente prin punctele E și F ($E \in (AF)$). Arătați că $\frac{\mathcal{A}[BEDF]}{\mathcal{A}[ABCD]} = \frac{1}{3}$.

Soluție

Întrucât $[AB] \equiv [CD], [AE] \equiv [CF]$ și $\widehat{EAB} \equiv \widehat{FCD}$ (căci $AB \parallel CD$), rezultă că $\Delta ABE \equiv \Delta CDF$ (L.U.L.), de unde $[BE] \equiv [DF]$. Analog, demonstrăm că $[BF] \equiv [DE]$. Drept urmare, patrulaterul $BEDF$ este paralelogram, ceea ce arată că $\mathcal{A}[BEDF] = 2\mathcal{A}[BEF]$. Remarcăm și faptul că $\mathcal{A}[ABCD] = 2\mathcal{A}[BAC]$ (căci patrulaterul $ABCD$ este paralelogram). Ținând seama de cele stabilite anterior, deducem că $\frac{\mathcal{A}[BEDF]}{\mathcal{A}[ABCD]} = \frac{\mathcal{A}[BEF]}{\mathcal{A}[BAC]}$, ceea ce, împreună cu $\frac{\mathcal{A}[BEF]}{\mathcal{A}[BAC]} = \frac{1}{3}$ (fiindcă $\frac{EF}{AC} = \frac{1}{3}$), conduce la egalitatea pe care trebuia să o demonstrăm.

20. Se consideră dreptunghiul $ABCD$. Fie E mijlocul lui $[BC]$ și F mijlocul lui $[CD]$. Aflați $\mathcal{A}[ABCD]$, știind că $\mathcal{A}[AEF] = 12\text{cm}^2$.

Soluție

Fie $\mathcal{S} = \mathcal{A}[ABCD]$. Evident, $\mathcal{A}[ABC] = \mathcal{A}[ADC] = \frac{\mathcal{S}}{2}$. Deoarece $[AE]$ este mediană în triunghiul ABC, rezultă că $\mathcal{A}[AEC] = \frac{\mathcal{A}[ABC]}{2} = \frac{\mathcal{S}}{4}$. Analog, arătăm că $\mathcal{A}[AFC] = \frac{\mathcal{S}}{4}$. Având în vedere că $\mathcal{A}[AECF] = \mathcal{A}[AEC] + \mathcal{A}[AFC]$, deducem că $\mathcal{A}[AECF] = \frac{\mathcal{S}}{2}$. Remarcăm și faptul că $\mathcal{A}[CEF] = \frac{1}{2}CE \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot \frac{CB}{2} \cdot \frac{CD}{2} = \frac{1}{8}CB \cdot CD = \frac{\mathcal{S}}{8}$. Ținând seama atât de cele stabilite anterior, cât și de faptul că $\mathcal{A}[AEF] = \mathcal{A}[AECF] - \mathcal{A}[CEF]$ conchidem că $\mathcal{A}[AEF] = \frac{\mathcal{S}}{2} - \frac{\mathcal{S}}{8} = \frac{3\mathcal{S}}{8}$. Rezultă că $\frac{3\mathcal{S}}{8} = 12$, de unde $\mathcal{S} = 32\text{cm}^2$.

21. Aflați aria dreptunghiului $ABCD$, știind că $AC = 8\text{cm}$ și $m(\widehat{BAC}) = 15°$.

Soluție

Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Întrucât $[OA] \equiv [OB]$, rezultă că $\widehat{OAB} \equiv \widehat{OBA}$. Remarcând că $\widehat{BOC}$ este unghi exterior al triunghiului BOC, deducem că $m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{OAB}) + m(\widehat{OBA})$, de unde $m(\widehat{BOC}) = 2 \cdot 15° = 30°$. Evidențiem și faptul că $\mathcal{A}[OBC] = \frac{1}{2}OB \cdot OC \cdot \sin(\widehat{BOC}) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 4\text{cm}^2$. Totodată, $\mathcal{A}[ABCD] = 4\mathcal{A}[OBC]$, deci $\mathcal{A}[ABCD] = 16\text{cm}^2$.

22. Fie rombul $ABCD$ în care $m(\hat{A}) < 90°$. Arătați că $AC \cdot BD = AB^2$ dacă și numai dacă $m(\hat{A}) = 30°$.

Soluție

Fie $BE \perp AD$ ($E \in AD$).

Dacă $m(\hat{A}) = 30°$, atunci $BE = \frac{AB}{2}$. Remarcând faptul că $\mathcal{A}[ABCD] =$

Scanned with OKEN Scanner

$= 2\mathcal{A}[ABD] = AD \cdot BE$, deducem că $\mathcal{A}[ABCD] = \frac{AB^2}{2}$. Totodată, $\mathcal{A}[ABCD] = \frac{AC \cdot BD}{2}$. În consecință, $AC \cdot BD = AB^2$.

Fie $AC \cdot BD = AB^2$. Ținând seama și de faptul că $\mathcal{A}[ABCD] = \frac{AC \cdot BD}{2}$, deducem că $\mathcal{A}[ABCD] = \frac{AB^2}{2}$. Totodată, $\mathcal{A}[ABCD] = AD \cdot BE = AB \cdot BE$, deci $AB \cdot DE = \frac{AB^2}{2}$, de unde $BE = \frac{AB}{2}$, ceea ce implică $m(\widehat{BAE}) = 30°$ (căci $m(\widehat{BEA}) = 90°$). Prin urmare, $m(\hat{A}) = 30°$.

23. **Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ ($AB \parallel CD$ și $AB > CD$) și punctul $E \in (AB)$ astfel încât $DE \perp AB$. Aflați măsura unuia dintre unghiurile formate de diagonalele trapezului considerat, știind că $AB - CD = 2\text{cm}$, $DE = 4\text{cm}$ și $\mathcal{A}[ABCD] = 16\text{cm}^2$.**

Soluție

Deoarece $\mathcal{A}[ABCD] = \frac{(AB+CD)DE}{2} = 2(AB+CD)$, rezultă că $2(AB+CD) = 16$ de unde $AB+CD = 8$. Ținând seama și de faptul că $AB-CD = 2$, deducem că $AB = 5\text{cm}$ și $CD = 3\text{cm}$. Cum $AE = \frac{AB-CD}{2}$ (căci trapezul $ABCD$ este isoscel și $DE \perp AB$), rezultă că $AE = 1\text{cm}$, de unde $EB = 4\text{cm}$, ceea ce, împreună cu $DE = 4\text{cm}$ și $DE \perp EB$, arată că triunghiul BED este dreptunghic isoscel. Prin urmare, $m(\widehat{DBE}) = 45°$. Fie $\{O\} = AC \cap BD$. Deoarece $[OA] \equiv [OB]$ (fiindcă trapezul $ABCD$ este isoscel), rezultă că $\widehat{OAB} \equiv \widehat{OBA}$. Deci, $m(\widehat{OAB}) = m(\widehat{OBA}) = 45°$ și, deci, $m(\widehat{AOB}) = 90°$.

24. **Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ ($AB \parallel CD$) în care $AB = 3CD$. Fie E mijlocul lui $[AC]$ și F mijlocul lui $[BD]$.**

a) Arătați că patrulaterul $CDEF$ este dreptunghi.

b) Demonstrați că $4\mathcal{A}[CDEF] = \mathcal{A}[ABCD]$.

Soluție

a) Întrucât E și F sunt mijloacele diagonalelor trapezului $ABCD$, rezultă că $EF \parallel CD$ și $EF = \frac{AB-CD}{2} = \frac{3CD-CD}{2} = CD$, ceea ce arată că patrulaterul $CDEF$ este paralelogram. Remarcând și faptul că $[EC] \equiv [FD]$ (căci $EC = \frac{AC}{2}, FD = \frac{BD}{2}$ și $AC = BD$), deducem că patrulaterul $CDEF$ este dreptunghi.

b) Evident, $\mathcal{A}[CDEF] = CD \cdot DE$. Fie $\{L\} = DE \cap AB$. Întrucât $DE \perp EF$ și $EF \parallel AB$, rezultă că $DL \perp AB$. Drept urmare, $\mathcal{A}[ABCD] = \frac{(AB+CD)DL}{2} = 2CD \cdot DL$. Având în vedere că $\triangle AEL \equiv \triangle CED$ (I.U.), deducem că $[EL] \equiv [ED]$, de unde $DL = 2DE$. Rezultă că $\mathcal{A}[ABCD] = 4CD \cdot DE$. Deci, $4\mathcal{A}[CDEF] = \mathcal{A}[ABCD]$.

25. **Se consideră trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Fie M mijlocul lui $[AD]$, N mijlocul lui $[BC]$ și**

Scanned with OKEN Scanner

O mijlocul lui $[MN]$. Perpendiculara în O pe MN intersectează AB în K și CD în L.

a) Arătați că patrulaterul $MKNL$ este romb.

b) Aflați $\mathcal{A}[MKNL]$, știind că $\mathcal{A}[ABCD] = 24\text{cm}^2$.

Soluție

a) Deoarece $[MN]$ este linie mijlocie în trapezul $ABCD$, rezultă că $[OK] \equiv [OL]$, ceea ce, împreună cu $[OM] \equiv [ON]$, arată că patrulaterul $MKLN$ este paralelogram. Remarcând și faptul că $LK \perp MN$, deducem că patrulaterul $MKLN$ este romb.

b) Evident, $\mathcal{A}[MKNL] = \frac{MN \cdot KL}{2}$. Fie $DE \perp AB$ $(E \in AB)$. Atunci, $\mathcal{A}[ABCD] = \frac{(AB+CD)DE}{2}$. Întrucât $\frac{AB+CD}{2} = MN$, iar $DE = KL$ (căci patrulaterul $DEKL$ este dreptunghi), rezultă că $\mathcal{A}[ABCD] = MN \cdot KL$, de unde $MN \cdot KL = 24$. Drept urmare, $\mathcal{A}[MKNL] = 12\text{cm}^2$.

26. **Arătați că dreapta ce trece prin mijlocul liniei mijlocii a unui trapez și care intersectează bazele trapezului descompune trapezul în două patrulatere având aceeași arie.**

Soluție

Fie $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ trapezul considerat în enunț, M mijlocul lui $[AD]$, N mijlocul lui $[BC]$ și O mijlocul $[MN]$. Să notăm cu E și F intersecțiile dreptei ce trece prin O cu (AB), respectiv (CD). Astfel, dreapta menționată anterior descompune trapezul $ABCD$ în patrulaterele $AEFD$ și $BEFC$. Deoarece $AE \parallel DF$ și $BE \parallel CF$, rezultă că aceste patrulatere sunt trapeze. Fie h lungimea înălțimii trapezului $ABCD$ și $a = MN$. Evident, $\mathcal{A}[ABCD] = \frac{(AB+CD)\cdot h}{2} = MN \cdot h = ah$ (căci $MN = \frac{AB+CD}{2}$). Totodată, $\mathcal{A}[AEFD] = \frac{(AE+DF)\cdot h}{2} = MO \cdot h = \frac{MN}{2}h = \frac{ah}{2}$ (fiindcă $[MO]$ este linie mijlocie în trapezul $AEFD$). Cum $\mathcal{A}[BEFC] = \mathcal{A}[ABCD] - \mathcal{A}[AEFD]$, rezultă că $\mathcal{A}[BEFC] = \frac{ah}{2}$. Deci, $\mathcal{A}[AEFD] = \mathcal{A}[BEFC]$.

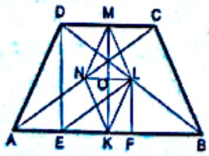
27. **Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ $(AB \parallel CD$ și $AB > CD)$. Fie $DE \perp AB$ $(E \in AB)$, iar K, L, M, N, respectiv, mijloacele segmentelor AB, BD, CD, AC.**

a) Arătați că patrulaterul $AELN$ este paralelogram, iar patrulaterul $KLMN$ este romb.

b) Demonstrați că $\mathcal{A}[AELN] = \mathcal{A}[KLMN]$.

Soluție

a) Întrucât N și L sunt mijloacele diagonalelor trapezului $ABCD$, rezultă



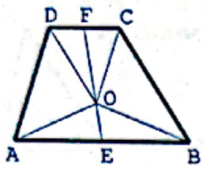
că $NL \parallel AB$ și $NL = \frac{AB-CD}{2}$. Totodată, $AE = \frac{AB-CD}{2}$ (căci trapezul $ABCD$ este isoscel, iar $DE \perp AD$). Prin urmare, $NL \parallel AE$ și $[NL] \equiv [AE]$, ceea ce arată că patrulaterul $AELN$ este paralelogram. Având în vedere că $LK \parallel DA$ și $LK = \frac{DA}{2}$ (fiindcă $[LK]$ este linie mijlocie în triunghiul ABD), iar $MN \parallel DA$ și $MN = \frac{DA}{2}$ (pentru că $[MN]$ este linie mijlocie în triunghiul ACD), deducem că $LK \parallel MN$ și $[LK] \equiv [MN]$. Ținând seama și de faptul că $[LK] \equiv [LM]$ (căci $LK = \frac{AD}{2}, LM = \frac{BC}{2}$ și $AD = BC$), conchidem că patrulaterul $KLMN$ este romb.

Scanned with OKEN Scanner

b) Fie $LF \perp AB$ $(F \in AB)$ și $\{O\} = KM \cap LN$. Evident, $\mathcal{A}[AELN] = AE \cdot LF$ și $\mathcal{A}[KLMN] = \frac{NL \cdot KM}{2}$. Remarcând că $AE = NL$ și $\frac{KM}{2} = OK = LF$ (fiindcă patrulaterul $KFLO$ este dreptunghi), deducem că $\mathcal{A}[AELN] = \mathcal{A}[KLMN]$.

28. Arătați că într-un trapez triunghiurile formate de laturile neparalele și un punct situat pe segmentul determinat de mijloacele bazelor sunt echivalente.

Soluție



Fie $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ trapezul considerat în enunțul problemei, E mijlocul lui $[AB]$, F mijlocul lui $[CD]$ și O un punct situat pe $[EF]$.

Dacă $O = E$ sau $O = F$, cerința enunțului se realizează imediat (căci $AB \parallel CD$). Fie $O \in (EF)$ și h înălțimea trapezului. Evident, $\mathcal{A}[OAD] = \mathcal{A}[AEFD] - (\mathcal{A}[OAE] + \mathcal{A}[ODF])$ și $\mathcal{A}[OBC] = \mathcal{A}[BEFC] - (\mathcal{A}[OBE] + \mathcal{A}[OCF])$. Deoarece $EA = EB$ și $FD = FC$, rezultă că $\mathcal{A}[AEFD] = \mathcal{A}[BEFC]$ (căci $\mathcal{A}[AEFD] = \frac{(EA + FD)h}{2}$ și $\mathcal{A}[BEFC] = \frac{(EB + FC)h}{2}$), $\mathcal{A}[OAE] = \mathcal{A}[OBE]$ și $\mathcal{A}[ODF] = \mathcal{A}[OCF]$. Deci, $\mathcal{A}[OAD] = \mathcal{A}[OBC]$.

29. Fie patrulaterul convex $ABCD$ și $\{O\} = AC \cap BD$. Demonstrați că $\mathcal{A}[OAD] = \mathcal{A}[OBC]$ dacă și numai dacă $AB \parallel CD$.

Soluție

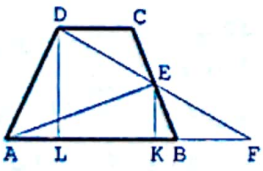
1. Să demonstrăm implicația : dacă $AB \parallel CD$, atunci $\mathcal{A}[OAD] = \mathcal{A}[OBC]$. Dacă $CD \parallel AB$, atunci $\mathcal{A}[DAB] = \mathcal{A}[CAB]$, de unde $\mathcal{A}[DAB] - \mathcal{A}[OAB] = \mathcal{A}[CAB] - \mathcal{A}[OAB]$, ceea ce conduce la $\mathcal{A}[OAD] = \mathcal{A}[OBC]$.

Observație. Acest rezultat poate fi formulat și astfel : ariile triunghiurilor formate de laturile neparalele și punctul de intersecție a diagonalelor unui trapez sunt egale.

2. Să demonstrăm implicația : dacă $\mathcal{A}[OAD] = \mathcal{A}[OBC]$, atunci $CD \parallel AB$ Fie $DE \perp AB$ și $CF \perp AB$ $(E, F \in AB)$. Deoarece $\mathcal{A}[OAD] = \mathcal{A}[OBC]$, rezultă că $\mathcal{A}[OAD] + \mathcal{A}[OAB] = \mathcal{A}[OBC] + \mathcal{A}[OAB]$, ceea ce conduce la $\mathcal{A}[DAB] = \mathcal{A}[CAB]$, deci $\frac{1}{2} AB \cdot DE = \frac{1}{2} AB \cdot CF$, de unde $[DE] \equiv [CF]$. Ținând seama și de faptul că $DE \parallel CF$, deducem că patrulaterul $CDEF$ este paralelogram. Drept urmare, $CD \parallel EF$, ceea ce este totuna cu $CD \parallel AB$.

30. Fie trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ și E mijlocul lui $[BC]$. Arătați că $\mathcal{A}[ADE] = \frac{\mathcal{A}[ABCD]}{2}$.

Soluție



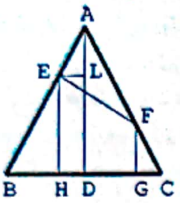
Fie $\{F\} = DE \cap AB$. Deoarece $[EB] \equiv [EC]$, $\widehat{BEF} \equiv \widehat{CED}$ și $\widehat{EBF} \equiv \widehat{ECD}$, rezultă că $\Delta EBF \equiv \Delta ECD$, ceea ce implică $[EF] \equiv [ED]$, $[BF] \equiv [CD]$ și $\mathcal{A}[EBF] = \mathcal{A}[ECD]$. Se arată cu ușurință că $\mathcal{A}[AED] = \mathcal{A}[ABCD] - (\mathcal{A}[EAB] + \mathcal{A}[ECD]) = \mathcal{A}[ABCD] - (\mathcal{A}[EAB] + \mathcal{A}[EBF]) = \mathcal{A}[ABCD] - \mathcal{A}[EAF]$.

Fie $EK \perp AB$ și $DL \perp AB$ $(K, L \in AB)$. Întrucât $EK \parallel DL$ și $[EF] \equiv [ED]$, rezultă că $[EK]$ este linie mijlocie în triunghiul FDL, de unde $EK = \frac{DL}{2}$. Remarcând și faptul că $\mathcal{A}[EAF] = \frac{AF \cdot EK}{2} = \frac{(AB + BF) \cdot EK}{2} = \frac{(AB + CD) \cdot EK}{2}$, iar $\mathcal{A}[ABCD] = \frac{(AB + CD) \cdot DL}{2}$, deducem că $\mathcal{A}[EAF] = \frac{\mathcal{A}[ABCD]}{2}$, ceea ce, împreună cu cele stabilite anterior, arată că $\mathcal{A}[AED] = \frac{\mathcal{A}[ABCD]}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

31. Se consideră triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) și punctele $E \in (AB)$, $F \in (AC)$ astfel încât $[EA] \equiv [CF]$. Fie $FG \perp BC$ și $EH \perp BC$ ($G, H \in BC$). Arătați că $\mathcal{A}[EFGH] = \frac{1}{2}\mathcal{A}[ABC]$.

Soluție



Întrucât patrulaterul $EFGH$ este trapez (căci $EH \perp BC$ și $FG \perp BC$ implică $EH \parallel FG$), rezultă că $\mathcal{A}[EFGH] = \frac{(EH + FG) \cdot HG}{2}$.

Fie $AD \perp BC$ și $EL \perp AD$ ($D \in BC$, $L \in AD$). Evident, $AD = AL + LD$. Remarcând faptul că $[AL] \equiv [FG]$ (fiindcă $\Delta AEL \equiv \Delta FCG$ (I.U.), iar $[LD] \equiv [EH]$ (căci patrulaterul $ELDH$ este dreptunghi), deducem că $AD = EH + FG$. Totodată, $HG = HD + DG$, iar $[HD] \equiv [GC]$ (fiindcă $[HD] \equiv [EL]$ și $[EL] \equiv [GC]$), deci $HG = GC + DG = DC$, ceea ce, împreună cu $DC = \frac{BC}{2}$ (căci $[AB] \equiv [AC]$ și $AD \perp BC$ implică $[DB] \equiv [DC]$), conduce la $HG = \frac{BC}{2}$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $\mathcal{A}[EFGH] = \frac{AD \cdot BC}{4}$, de unde $\mathcal{A}[EFGH] = \frac{1}{2}\mathcal{A}[ABC]$.

32. Fie M un punct situat în interiorul triunghiului ABC și $\{N\} = AM \cap BC$. Arătați că $\frac{\mathcal{A}[MBC]}{\mathcal{A}[ABC]} = \frac{MN}{AN}$.

Soluție

Fie $AD \perp BC$ și $ME \perp BC$ ($D, E \in BC$). Atunci, $\mathcal{A}[MBC] = \frac{BC \cdot ME}{2}$ și $\mathcal{A}[ABC] = \frac{BC \cdot AD}{2}$, de unde $\frac{\mathcal{A}[MBC]}{\mathcal{A}[ABC]} = \frac{ME}{AD}$. Având în vedere că $\Delta NME \sim \Delta NAD$ (căci $ME \parallel AD$), deducem că $\frac{ME}{AD} = \frac{MN}{AN}$. Prin urmare, $\frac{\mathcal{A}[MBC]}{\mathcal{A}[ABC]} = \frac{MN}{AN}$.

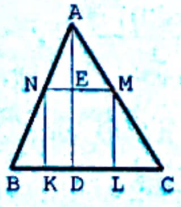
33. Fie triunghiul ABC și punctele $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ astfel încât $DE \parallel BC$. Aflați $\mathcal{A}[BCED]$, știind că $BD = 2AD$ și că $\mathcal{A}[ABC] = 72\ \text{cm}^2$.

Soluție

Deoarece $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ (căci $DE \parallel BC$), rezultă că $\frac{\mathcal{A}[ADE]}{\mathcal{A}[ABC]} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2$. Din faptul că $BD = 2AD$ deducem că $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$. Drept urmare, $\frac{\mathcal{A}[ADE]}{\mathcal{A}[ABC]} = \frac{1}{9}$, de unde $\mathcal{A}[ADE] = 8\ \text{cm}^2$. Cum $\mathcal{A}[BCED] = \mathcal{A}[ABC] - \mathcal{A}[ADE]$, conchidem că $\mathcal{A}[BCED] = 64\ \text{cm}^2$.

34. Fie triunghiul ABC și pătratul $KLMN$ astfel încât $K, L \in (BC)$, $M \in (CA)$ și $N \in (AB)$. Aflați lungimea laturii pătratului, știind că $BC = 15\ \text{cm}$ și că $\mathcal{A}[ABC] = 75\ \text{cm}^2$.

Soluție



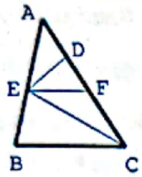
Fie $AD \perp BC$ ($D \in BC$), $\{E\} = AD \cap MN$ și $a = MN$. Întrucât $\mathcal{A}[ABC] = \frac{AD \cdot BC}{2}$, rezultă că $15AD = 150$, de unde $AD = 10\ \text{cm}$. Remarcând faptul că $\Delta ANM \sim \Delta ABC$ (căci $MN \parallel KL$ implică $MN \parallel BC$) și $\Delta ANE \sim \Delta ABD$, deducem că $\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AB}$,

Scanned with OKEN Scanner

respectiv $\frac{AN}{AB}=\frac{AE}{AD}$, de unde $\frac{MN}{BC}=\frac{AE}{AD}$. Cum $AE=AD-ED=AD-MN$ (fiindcă $[ED]\equiv[NK]$ și $[NK]\equiv[MN]$), rezultă că $\frac{a}{15}=\frac{10-a}{10}$, ceea ce conduce la $a=6$ cm.

35. **Fie triunghiul ABC și punctele $E\in(AB)$, $F\in(AC)$ astfel încât $EF\parallel BC$. Calculați $\mathcal{A}[ACE]$, știind că $\mathcal{A}[ABC]=50\ \text{cm}^2$ și $\mathcal{A}[AEF]=18\ \text{cm}^2$.**

Soluție



Deoarece $F\in(AC)$, rezultă că $\mathcal{A}[ACE]=\mathcal{A}[AEF]+\mathcal{A}[CEF]$. Fie $ED\perp AC$ ($D\in AC$). Atunci, $\mathcal{A}[CEF]=\frac{CF\cdot ED}{2}$ și $\mathcal{A}[AEF]=\frac{AF\cdot ED}{2}$, de unde $\frac{\mathcal{A}[CEF]}{\mathcal{A}[AEF]}=\frac{CF}{AF}$. Pe de altă parte, $\frac{\mathcal{A}[AEF]}{\mathcal{A}[ABC]}=\left(\frac{AF}{AC}\right)^2$ (căci $EF\parallel BC$ implică $\Delta AEF\sim\Delta ABC$), ceea ce conduce la $\left(\frac{AF}{AC}\right)^2=\frac{9}{25}$, de unde $\frac{AF}{AC}=\frac{3}{5}$. Cum ultima egalitate implică $\frac{AF}{CF}=\frac{3}{2}$, rezultă că $\frac{\mathcal{A}[CEF]}{\mathcal{A}[AEF]}=\frac{2}{3}$, deci $\mathcal{A}[CEF]=12\ \text{cm}^2$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $\mathcal{A}[ACE]=30\ \text{cm}^2$.

36. **Arătați că raportul ariilor a două triunghiuri care au două unghiuri, respectiv, congruente sau suplementare este egal cu raportul produselor lungimilor laturilor ce formează aceste unghiuri.**

Soluție

Fie ABC și $A'B'C'$ triunghiurile menționate în enunț. Pentru fixare, să presupunem că $\widehat{ABC}\equiv\widehat{A'B'C'}$ sau că $m(\widehat{ABC})+m(\widehat{A'B'C'})=180°$. Fie $AD\perp BC$ și $A'D'\perp B'C'$ ($D\in BC$, $D'\in B'C'$). Atunci, $\frac{\mathcal{A}[ABC]}{\mathcal{A}[A'B'C']}=\frac{BC\cdot AD}{B'C'\cdot A'D'}$.

1) Dacă $\widehat{ABC}\equiv\widehat{A'B'C'}$, atunci $\Delta ABD\sim\Delta A'B'D'$ (căci $m(\widehat{ADB})=m(\widehat{A'D'B'})=90°$ și $\widehat{ABD}\equiv\widehat{A'B'D'}$), de unde $\frac{AD}{A'D'}=\frac{BA}{B'A'}$. Drept urmare, $\frac{\mathcal{A}[ABC]}{\mathcal{A}[A'B'C']}=\frac{BC\cdot BA}{B'C'\cdot B'A'}$.

2) Să considerăm cazul în care $m(\widehat{ABC})+m(\widehat{A'B'C'})=180°$. Pentru fixare, să presupunem că $m(\widehat{A'B'C'})>90°$. Deoarece $m(\widehat{A'B'D'})+m(\widehat{A'B'C'})=180°$ (fiindcă $B'\in(D'C')$), rezultă că $\widehat{ABC}\equiv\widehat{A'B'D'}$, ceea ce este totuna cu $\widehat{ABD}\equiv\widehat{A'B'D'}$, de unde $\Delta ABD\sim\Delta A'B'D'$, deci $\frac{AD}{A'D'}=\frac{BA}{B'A'}$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $\frac{\mathcal{A}[ABC]}{\mathcal{A}[A'B'C']}=\frac{BC\cdot BA}{B'C'\cdot B'A'}$.

37. **Fie triunghiul ABC și punctele E, $F\in(BC)$ astfel încât $\widehat{EAB}\equiv\widehat{FAC}$. Arătați că $AB\cdot AE\cdot CF=AC\cdot AF\cdot BE$.**

Soluție

Fie $AD\perp BC$ ($D\in BC$).

Deoarece $\widehat{EAB}\equiv\widehat{FAC}$, rezultă că $\frac{\mathcal{A}[ABE]}{\mathcal{A}[ACF]}=\frac{AB\cdot AE}{AC\cdot AF}$. Totodată, $\frac{\mathcal{A}[ABE]}{\mathcal{A}[ACF]}=\frac{BE}{CF}$ (căci $\mathcal{A}[ABE]=\frac{BE\cdot AD}{2}$ și $\mathcal{A}[ACF]=\frac{CF\cdot AD}{2}$). Prin urmare, $\frac{AB\cdot AE}{AC\cdot AF}=\frac{BE}{CF}$, ceea ce conduce la egalitatea pe care trebuia să o demonstrăm.

38. **Fie O punctul de intersecție a diagonalelor patrulaterului convex $ABCD$. Aflați $\mathcal{A}[ABCD]$, știind că $\mathcal{A}[OAB]=12\ \text{cm}^2$, $\mathcal{A}[OBC]=16\ \text{cm}^2$ și $\mathcal{A}[OCD]=20\ \text{cm}^2$.**

Scanned with OKEN Scanner

Soluție

Întrucât $\frac{\mathcal{A}[OCD]}{\mathcal{A}[OBC]}=\frac{OD\cdot OC}{OC\cdot OB}=\frac{OD}{OB}$ (căci $m(\widehat{COD})+m(\widehat{BOC})=180°$), rezultă că $\frac{OD}{OB}=\frac{5}{4}$, ceea ce, împreună cu $\frac{\mathcal{A}[ODA]}{\mathcal{A}[OAB]}=\frac{OD}{OB}$ (fiindcă $m(\widehat{AOD})+m(\widehat{AOB})=180°$), conduce la $\frac{\mathcal{A}[ODA]}{12}=\frac{5}{4}$, de unde $\mathcal{A}[ODA]=15\ cm^2$. Remarcând și faptul că $\mathcal{A}[ABCD]=\mathcal{A}[OAB]+\mathcal{A}[OBC]+\mathcal{A}[OCD]+\mathcal{A}[ODA]$, conchidem că $\mathcal{A}[ABCD]=63\ cm^2$.

39. **Fie O punctul de intersecție a diagonalelor patrulaterului convex $ABCD$. Arătați că, dacă $\mathcal{A}^2[OCD]=\mathcal{A}[OAD]\cdot\mathcal{A}[OBC]$, atunci $ABCD$ este trapez sau paralelogram.**

Soluție

Deoarece $m(\widehat{COD})+m(\widehat{AOD})=180°$ și $m(\widehat{BOC})+m(\widehat{COD})=180°$, rezultă că $\frac{\mathcal{A}[OCD]}{\mathcal{A}[OAD]}=\frac{OC\cdot OD}{OA\cdot OD}=\frac{OC}{OA}$, respectiv $\frac{\mathcal{A}[OBC]}{\mathcal{A}[OCD]}=\frac{OB\cdot OC}{OC\cdot OD}=\frac{OB}{OD}$. Ținând seama și de faptul că egalitatea din enunț poate fi scrisă sub forma $\frac{\mathcal{A}[OCD]}{\mathcal{A}[OAD]}=\frac{\mathcal{A}[OBC]}{\mathcal{A}[OCD]}$, deducem că $\frac{OC}{OA}=\frac{OB}{OD}$, ceea ce, împreună cu $\widehat{BOC}\equiv\widehat{DOA}$, arată că $\Delta OCB\sim\Delta OAD$, de unde $BC\parallel AD$. Drept urmare, cerința enunțului a fost îndeplinită.

40. **Fie O punctul de intersecție a diagonalelor trapezului $ABCD\,(AB\parallel CD)$. Arătați că, dacă $\mathcal{A}[OAB]=a^2$ și $\mathcal{A}[OCD]=b^2$, atunci $\mathcal{A}[ABCD]=(a+b)^2$.**

Soluție

Fie $S_1=\mathcal{A}[OAB]$, $S_2=\mathcal{A}[OBC]$, $S_3=\mathcal{A}[OCD]$ și $S_4=\mathcal{A}[ODA]$.

Întrucât $\frac{S_2}{S_4}=\frac{OB\cdot OC}{OD\cdot OA}$ (căci $\widehat{BOC}\equiv\widehat{DOA}$) și $\frac{OB}{OD}=\frac{OA}{OC}$ (fiindcă $AB\parallel CD$ implică $\Delta OAB\sim\Delta OCD$), rezultă că $\frac{S_2}{S_4}=1$, de unde $S_2=S_4$.

Remarcând că $\frac{S_1}{S_2}=\frac{OA\cdot OB}{OB\cdot OC}=\frac{OA}{OC}$ (căci $m(\widehat{AOB})+m(\widehat{BOC})=180°$), $\frac{S_2}{S_3}=\frac{OB}{OD}$ (fiindcă $m(\widehat{BOC})+m(\widehat{COD})=180°$) și $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}$ (căci $AB\parallel CD$), deducem că $\frac{S_1}{S_2}=\frac{S_2}{S_3}$, de unde $S_2=\sqrt{S_1S_3}$. Drept urmare, $S_2=ab$ (fiindcă $S_1=a^2$ și $S_3=b^2$).

Având în vedere atât cele stabilite anterior, cât și faptul că $\mathcal{A}[ABCD]=\mathcal{A}[AOB]+\mathcal{A}[OBC]+\mathcal{A}[OCD]+\mathcal{A}[ODA]=S_1+S_2+S_3+S_4$ (căci punctul O este în interiorul trapezului), conchidem că $\mathcal{A}[ABCD]=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$.

41. **Fie M un punct situat în interiorul triunghiului ABC și $\{D\}=AM\cap BC$, $\{E\}=BM\cap CA$, $\{F\}=CM\cap AB$. Arătați că $\frac{DM}{DA}+\frac{EM}{EB}+\frac{FM}{FC}=1$.**

Soluție

Deoarece punctul M este situat în interiorul triunghiului ABC, rezultă că $\mathcal{A}[MBC]+\mathcal{A}[MCA]+\mathcal{A}[MAB]=\mathcal{A}[ABC]$, de unde $\frac{\mathcal{A}[MBC]}{\mathcal{A}[ABC]}+\frac{\mathcal{A}[MCA]}{\mathcal{A}[ABC]}+\frac{\mathcal{A}[MAB]}{\mathcal{A}[ABC]}=1$.

Fie $AL\perp BC$ și $MN\perp BC$ ($L,\ N\in BC$). Atunci, $\mathcal{A}[MBC]=\frac{BC\cdot MN}{2}$ și

Scanned with OKEN Scanner

$\mathcal{A}[ABC]=\frac{BC\cdot AL}{2}$, de unde $\frac{\mathcal{A}[MBC]}{\mathcal{A}[ABC]}=\frac{MN}{AL}$. Remarcând faptul că $\Delta DMN\sim\Delta DAL$ (căci $MN\perp BC$ și $AL\perp BC$ implică $MN\parallel AL$), deducem că $\frac{MN}{AL}=\frac{DM}{DA}$, deci $\frac{\mathcal{A}[MBC]}{\mathcal{A}[ABC]}=\frac{DM}{DA}$. Analog, arătăm că $\frac{\mathcal{A}[MCA]}{\mathcal{A}[ABC]}=\frac{EM}{EB}$ și $\frac{\mathcal{A}[MAB]}{\mathcal{A}[ABC]}=\frac{FM}{FC}$. Adunând ultimele trei egalități membru cu membru, obținem o egalitate ce conduce la egalitatea pe care trebuia să o demonstrăm.

42. Arătați că două triunghiuri care au înălțimile respectiv congruente sunt congruente.

Soluție

Fie ABC și $A'B'C'$ triunghiurile considerate în enunțul problemei, D, E, F picioarele înălțimilor în triunghiul ABC ($D\in BC$, $E\in CA$, $F\in AB$), D', E', F' picioarele înălțimilor în triunghiul $A'B'C'$ ($D'\in B'C'$, $E'\in C'A'$, $F'\in A'B'$), $S=\mathcal{A}[ABC]$ și $S'=\mathcal{A}[A'B'C']$. Pentru fixare, să presupunem că $[AD]\equiv[A'D']$, $[BE]\equiv[B'E']$ și $[CF]\equiv[C'F']$.

Evident, $\frac{S}{S'}=\frac{BC\cdot AD}{B'C'\cdot A'D'}=\frac{BC}{B'C'}$ (căci $[AD]\equiv[A'D']$). Analog, $\frac{S}{S'}=\frac{CA}{C'A'}$ și $\frac{S}{S'}=\frac{AB}{A'B'}$. Prin urmare, $\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}=\frac{AB}{A'B'}$, ceea ce arată că $\Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$, de unde $\widehat{ABC}\equiv\widehat{A'B'C'}$. Ținând seama și de faptul că $m(\widehat{ADB})=m(\widehat{A'D'B'})=90^\circ$, deducem că $\Delta ABD\sim\Delta A'B'D'$, de unde $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AD}{A'D'}=1$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $[AB]\equiv[A'B']$, $[BC]\equiv[B'C']$ și $[CA]\equiv[C'A']$, deci $\Delta ABC\equiv\Delta A'B'C'$ (L.L.L.).

43. Se consideră triunghiul dreptunghic isoscel $ABC(m(\hat{A})=90^\circ)$ și punctele $D\in(AB)$, $E\in(AC)$ astfel încât $DE\parallel BC$. Arătați că, dacă $\mathcal{A}[ADE]=\mathcal{A}[BCED]$, atunci $[DE]\equiv[AB]$.

Soluție

Deoarece $\mathcal{A}[ADE]=\mathcal{A}[BCED]$, rezultă că $\frac{\mathcal{A}[ADE]}{\mathcal{A}[ABC]}=\frac{1}{2}$. Totodată, $\frac{\mathcal{A}[ADE]}{\mathcal{A}[ABC]}=\left(\frac{DE}{BC}\right)^2$ (căci $DE\parallel BC\Rightarrow\Delta ADE\sim\Delta ABC$), deci $\left(\frac{DE}{BC}\right)^2=\frac{1}{2}$, de unde $2DE^2=BC^2$. Având în vedere că $m(\widehat{BAC})=90^\circ$, deducem că $AB^2+AC^2=BC^2$, ceea ce conduce la $2AB^2=BC^2$ (fiindcă $[AB]\equiv[AC]$). Drept urmare, $2DE^2=2AB^2$, de unde $[DE]\equiv[AB]$.

44. Aria unui triunghi dreptunghic este de $6\ cm^2$, iar lungimea ipotenuzei de $5\ cm$. Aflați perimetrul triunghiului.

Soluție

Fie ABC ($m(\hat{A})=90^\circ$) triunghiul considerat în enunț. Întrucât $\mathcal{A}[ABC]=\frac{AB\cdot AC}{2}$, rezultă că $AB\cdot AC=12$. Totodată, $AB^2+AC^2=BC^2=25$. Remarcând că $(AB+AC)^2=AB^2+AC^2+2AB\cdot AC$, deducem că $(AB+AC)^2=49$, de unde $AB+AC=7\ cm$. Drept urmare, $\mathcal{P}_{ABC}=12\ cm$.

45. Fie D mijlocul laturii BC a triunghiului ABC. Aflați $\mathcal{A}[ABC]$, știind că $AB=6\ cm$, $BC=20\ cm$ și $AD=8\ cm$.

Scanned with OKEN Scanner

Soluție

Deoarece $AB^2+AD^2=100$ și $BD^2=100$, rezultă că $AB^2+AD^2=BD^2$, ceea ce implică $m(\widehat{BAD})=90°$. Prin urmare, $\mathcal{A}[ABD]=\frac{AB\cdot AD}{2}=24\ cm^2$. Remarcând și faptul că $\mathcal{A}[ABC]=2\mathcal{A}[ABD]$ (căci $[AD]$ este mediană în triunghiul ABC), conchidem că $\mathcal{A}[ABC]=48\ cm^2$.

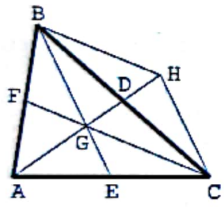
46. **Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A})=90°$) în care $m(\hat{C})=15°$. Fie $AD\perp BC$ ($D\in BC$) și E mijlocul lui $[BC]$. Aflați $\mathcal{A}[ABC]$, știind că $\mathcal{A}[ADE]=18\sqrt{3}\ cm^2$.**

Soluție

Fie $a=BC$. Atunci, $AE=\frac{a}{2}$ (căci $m(\hat{A})=90°$ și $[EB]\equiv[EC]$), iar $AD=\frac{a}{4}$ (fiindcă $m(\hat{C})=15°$ implică $m(\widehat{AED})=30°$). Din faptul că $DE^2=AE^2-AD^2$, deducem că $DE=\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Cum $\mathcal{A}[ADE]=\frac{AD\cdot DE}{2}$, rezultă că $\mathcal{A}[ADE]=\frac{a^2\sqrt{3}}{32}$, deci $\frac{a^2\sqrt{3}}{32}=18\sqrt{3}$, de unde $a=24\ cm$. Prin urmare, $BC=24\ cm$ și $AD=6\ cm$, iar $\mathcal{A}[ABC]=72\ cm^2$.

47. **Aflați aria unui triunghi, știind că lungimile medianelor sale sunt, respectiv, egale cu 9 cm, 12 cm și 15 cm.**

Soluție



Fie ABC triunghiul considerat în enunțul problemei și D, E, F, respectiv, mijloacele laturilor BC, CA, AB, iar G centrul de greutate al triunghiului. Pentru fixare, să presupunem că $AD=9\ cm$, $BE=12\ cm$ și $CF=15\ cm$. Deoarece G este centrul de greutate al triunghiului ABC, rezultă că $AG=6\ cm$, $BG=8\ cm$ și $CG=10\ cm$ (căci $AG=\frac{2AD}{3}$, $BG=\frac{2BE}{3}$ și $CG=\frac{2CF}{3}$). Remarcând că $6^2+8^2=10^2$ deducem că 6, 8 și 10 reprezintă lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic. Acest rezultat ne sugerează să construim un triunghi ale cărui laturi să fie, respectiv, congruente cu $[AG]$, $[BG]$ și $[CG]$. Fie H simetricul lui G față de D. Atunci, patrulaterul $BGCH$ este paralelogram (fiindcă $[DB]\equiv[DC]$ și $[DG]\equiv[DH]$). Rezultă că $HC=BG=8\ cm$. Totodată, $HC=2GD=AG=6\ cm$. Observând că $HC^2+HG^2=CG^2$, deducem că $m(\widehat{CHG})=90°$, ceea ce arată că $\mathcal{A}[CHG]=\frac{HC\cdot HG}{2}=24\ cm^2$. Întrucât $\mathcal{A}[CAG]=\mathcal{A}[CHG]$ (căci $AG=GH$), rezultă că $\mathcal{A}[CAG]=24\ cm^2$. Ținând seama și de faptul că $\mathcal{A}[ABC]=3\mathcal{A}[CAG]$ (fiindcă G este centrul de greutate al triunghiului ABC), conchidem că $\mathcal{A}[ABC]=72\ cm^2$.

48. **Aflați lungimile înălțimilor triunghiului ABC, știind că $AB=25\ cm$, $BC=11\ cm$ și $CA=30\ cm$.**

Soluție

Deoarece $11^2+25^2\neq 30^2$, rezultă că triunghiul ABC nu este dreptunghic.
Fie $AD\perp BC$ ($D\in BC$) și $x=BD$.
Remarcând că $AB<AC$, deducem că $m(\hat{C})<m(\hat{B})$, deci $m(\hat{C})<90°$. Pentru rezolvarea problemei, avem de analizat următoarele situații:

Scanned with OKEN Scanner

1) $m(\hat{B}) < 90°$. Atunci, $D \in (BC)$, deci $DC = BC - BD = 11 - x$. Cum $AD^2 = AB^2 - BD^2 = 625 - x^2$ (din triunghiul ABD) și $AD^2 = AC^2 - DC^2 = 900 - (11-x)^2$ (din triunghiul ACD), rezultă că $625 - x^2 = 900 - (11-x)^2$. Rezolvând această ecuație, obținem $x = -7$, ceea ce nu convine (căci $x > 0$). Prin urmare, situația considerată nu poate avea loc.

2) $m(\hat{B}) > 90°$. În acest caz, $B \in (DC)$, de unde $DC = DB + BC = x + 11$. Având în vedere că $AD^2 = 625 - x^2$ și, totodată, că $AD^2 = 900 - (x+11)^2$, deducem că $625 - x^2 = 900 - (x+11)^2$, de unde $x = 7$ cm și, deci, $AD = 24$ cm.

Fie $BE \perp AC$ și $CF \perp AB$ ($E \in AC$, $F \in AB$). Ținând seama de faptul că $\mathcal{A}[ABC] = \frac{AC \cdot BE}{2} = 15BE$ și, totodată, că $\mathcal{A}[ABC] = \frac{BC \cdot AD}{2} = 132 \text{ cm}^2$, deducem că $15BE = 132$, de unde $BE = 8{,}8$ cm. Analog, arătăm că $CF = 10{,}56$ cm.

49. Fie O centrul paralelogramului $ABCD$. Aflați $\mathcal{A}[ABCD]$, știind că $AB = 2\sqrt{19}$ cm, $BD = 8$ cm și $m(\widehat{BOC}) = 60°$.

Soluție

Fie $BE \perp AC$. Deoarece $m(\widehat{BOC}) < 90°$ și $m(\widehat{BCO}) < 90°$, rezultă că $E \in (OC)$. Având în vedere că $m(\widehat{BEO}) = 90°$ și $m(\widehat{OBE}) = 30°$, deducem că $OE = \frac{OB}{2}$, ceea ce, împreună cu $OB = 4$ cm (căci $OB = \frac{BD}{2}$), conduce la $OE = 2$ cm. Totodată, $BE^2 = OB^2 - OE^2$, deci $BE = 2\sqrt{3}$ cm. Pe de altă parte, $AE^2 = AB^2 - BE^2$, de unde $AE = 8$ cm. Cum $AO = AE - OE$, rezultă că $AO = 6$ cm, ceea ce implică $AC = 12$ cm (fiindcă $AC = 2AO$). Remarcând și faptul că $\mathcal{A}[ABCD] = 2\mathcal{A}[ABC] = AC \cdot BE$, conchidem că $\mathcal{A}[ABCD] = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

50. Se consideră paralelogramul $ABCD$ în care $m(\hat{A}) = 60°$, $BC = 4$ cm, iar aria este egală cu $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Aflați lungimile diagonalelor paralelogramului.

Soluție

Fie $DE \perp AB$ și $CF \perp AB$ ($E, F \in AB$). Se arată cu ușurință că $E \in (AB)$ și $B \in (AF)$. Întrucât $m(\widehat{DAE}) = 90°$ și $m(\widehat{ADE}) = 30°$, rezultă că $AE = \frac{AD}{2} = 2$ cm și $DE = 2\sqrt{3}$ cm (căci $DE^2 = AD^2 - AE^2$). Remarcând faptul că $\mathcal{A}[ABCD] = AB \cdot DE$, deducem că $2\sqrt{3} \cdot AB = 16\sqrt{3}$, de unde $AB = 8$ cm. Cum $EB = AB - AE$, rezultă că $EB = 6$ cm. Având în vedere că $DB^2 = EB^2 + DE^2$, deducem că $DB = 4\sqrt{3}$ cm. Deoarece $[BF] \equiv [AE]$, $[CF] \equiv [DE]$ și $AF = AB + BF$, rezultă că $CF = 2\sqrt{3}$ cm și $AF = 10$ cm. Ținând seama și de faptul că $AC^2 = AF^2 + CF^2$, conchidem că $AC = 4\sqrt{7}$ cm.

51. Un dreptunghi are aria de $4\sqrt{3} \text{ cm}^2$, iar lungimea uneia dintre diagonale de 4 cm. Aflați lungimile laturilor dreptunghiului și măsura unghiului ascuțit format de diagonalele dreptunghiului.

Soluție

Fie $ABCD$ ($AB > BC$) dreptunghiul considerat, iar $\{O\} = AC \cap BD$. Notăm $AB = a$ și $BC = b$. Atunci, $ab = 4\sqrt{3}$ și $a^2 + b^2 = 16$ (căci $AB^2 + BC^2 = AC^2$). Cum $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 16 + 8\sqrt{3} = 4(4 + 2\sqrt{3}) = 4(\sqrt{3}+1)^2$, rezultă că $a + b = 2(\sqrt{3}+1)$. Ținând seama că $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 16 - 8\sqrt{3} = 4(\sqrt{3}-1)^2$, deducem că $a - b = 2(\sqrt{3}-1)$ (fiindcă $a > b$).

Scanned with OKEN Scanner

Drept urmare, $a=2\sqrt{3}$cm și $b=2$cm. Remarcăm și faptul că $OB=OC=\frac{AC}{2}=2$cm. Rezultă că $[OB]\equiv[OC]\equiv[BC]$, ceea ce arată că triunghiul OBC este echilateral. Deci, $m(\widehat{BOC})=60°$.

52. Un romb are aria de 24cm^2 și înălțimea de $4{,}8$cm. Aflați lungimile diagonalelor rombului și sinusul unuia dintre unghiurile ascuțite ale rombului.

Soluție

Fie $ABCD$ rombul considerat, $\{O\}=AC\cap BD$, $DE\perp AB$ $(E\in AB)$, $d_1=AC$ și $d_2=BD$. Pentru fixare, să presupunem că $m(\widehat{BAD})<90°$. Atunci, $d_1>d_2$. Deoarece $\mathcal{A}[ABCD]=AB\cdot DE$, rezultă că $24=4{,}8AB$, de unde $AB=5$cm. Ținând seama de faptul că $\mathcal{A}[ABCD]=\frac{d_1d_2}{2}$, deducem că $d_1d_2=48$. Întrucât $OA^2+OB^2=AB^2$, iar $OA=\frac{d_1}{2}$ și $OB=\frac{d_2}{2}$, rezultă că $d_1^2+d_2^2=100$. Având în vedere că $(d_1+d_2)^2=d_1^2+d_2^2+2d_1d_2$ și $(d_1-d_2)^2=d_1^2+d_2^2-2d_1d_2$, deducem că $(d_1+d_2)^2=196$, iar $(d_1-d_2)^2=4$, de unde $d_1+d_2=14$ și $d_1-d_2=2$ (căci $d_1>d_2$). Rezultă că $d_1=8$cm și $d_2=6$cm. Remarcând că $\mathcal{A}[BAD]=\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\widehat{BAD}$ și că $\mathcal{A}[BAD]=\frac{1}{2}\mathcal{A}[ABCD]=12\text{cm}^2$, deducem că $12=\frac{25}{2}\sin\widehat{BAD}$, ceea ce conduce la $\sin\widehat{BAD}=\frac{24}{25}$.

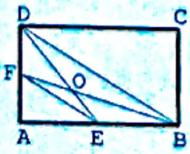
53. Fie dreptunghiul $ABCD$, $BE\perp AC$ și $DF\perp AC$ $(E,\ F\in AC)$. Arătați că, dacă $m(\widehat{BAC})=30°$, atunci $\mathcal{A}[BEDF]=\frac{1}{2}\mathcal{A}[ABCD]$.

Soluție

Fie $a=BC$. Atunci, $AC=2a$ (căci $m(\widehat{ABC})=90°$ și $m(\widehat{BAC})=30°$), iar $AB=a\sqrt{3}$ (fiindcă $AB^2=AC^2-BC^2$). Întrucât $\mathcal{A}[ABCD]=AB\cdot BC$, rezultă că $\mathcal{A}[ABCD]=a^2\sqrt{3}$. Remarcând faptul că $m(\widehat{BEC})=90°$ și $m(\widehat{CBE})=30°$ (căci $\widehat{CBE}\equiv\widehat{BAC}$), deducem că $CE=\frac{a}{2}$ și $BE=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Întrucât $\Delta DAF\equiv\Delta BCE$ (I.U.), rezultă că $[AF]\equiv[CE]$, de unde $AF=\frac{a}{2}$. Totodată, $EF=AC-(AF+CE)$, deci $EF=a$. Cum $\mathcal{A}[BEDF]=2\mathcal{A}[BEF]$ (fiindcă patrulaterul $BEDF$ este paralelogram), iar $\mathcal{A}[BEF]=\frac{EF\cdot BE}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, rezultă că $\mathcal{A}[BEDF]=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Ca urmare a celor stabilite anterior, $\mathcal{A}[BEDF]=\frac{1}{2}\mathcal{A}[ABCD]$.

54. Fie dreptunghiul $ABCD$, E mijlocul lui $[AB]$, F mijlocul lui $[AD]$ și $\{O\}=BF\cap DE$. Arătați că $\mathcal{A}[OBCD]=4\mathcal{A}[OEAF]$.

Soluție



Fie $S=\mathcal{A}[ABCD]$ și $S'=\mathcal{A}[OEF]$. Remarcăm, mai întâi, că $\mathcal{A}[OEAF]=\mathcal{A}[AEF]+\mathcal{A}[OEF]$. Totodată, $\mathcal{A}[AEF]=\frac{AE\cdot AF}{2}=\frac{AB\cdot AD}{8}=\frac{\mathcal{A}[ABCD]}{8}$, deci $\mathcal{A}[OEAF]=\frac{S}{8}+S'=\frac{1}{8}(S+8S')$. Pe de altă parte, $\mathcal{A}[OBCD]=\mathcal{A}[BCD]+\mathcal{A}[OBD]=\frac{\mathcal{A}[ABCD]}{2}+\mathcal{A}[OBD]$. Având în

Scanned with OKEN Scanner

vedere că $\Delta OBD \sim \Delta OFE$ (căci $EF \parallel BD$), deducem că $\frac{\mathcal{A}[OBD]}{\mathcal{A}[OEF]} = \left(\frac{BD}{EF}\right)^2 = 4$, ceea ce implică $\mathcal{A}[OBD] = 4\mathcal{A}[OEF] = 4S'$. Rezultă că $\mathcal{A}[OBCD] = \frac{S}{2} + 4S' = \frac{1}{2}(S + 8S')$. Drept urmare, $\mathcal{A}[OBCD] = 4\mathcal{A}[OEAF]$.

55. **Aflați aria trapezului** $ABCD (AB \parallel CD)$, **știind că** $AB = 25$ cm, $AC = 20$ cm, $AD = 6\sqrt{5}$ cm **și** $BC = 15$ cm.

Soluție

Întrucât $AC^2 + BC^2 = 625$ și $AB^2 = 625$, rezultă că $AC^2 + BC^2 = AB^2$, ceea ce implică $m(\widehat{ACB}) = 90°$. Fie $CE \perp AB$ și $DF \perp AB$ ($E, F \in AB$). Având în vedere că $m(\widehat{ACB}) = 90°$ și $CE \perp AB$, deducem că $CE = \frac{AC \cdot BC}{AB}$, de unde $CE = 12$ cm. Cum $EB^2 = CB^2 - CE^2$, rezultă că $EB = 9$ cm. Remarcăm și faptul că $DF = CE$ și $CD = EF$ (căci patrulaterul $CDFE$ este dreptunghi). Deoarece $AF^2 = AD^2 - DF^2$, rezultă că $AF = 6$ cm. Ținând seama atât de cele stabilite anterior, cât și de faptul că $AF + FE + EB = AB$, deducem că $EF = 10$ cm, de unde $CD = 10$ cm. Pe de altă parte, $\mathcal{A}[ABCD] = \frac{(AB + CD)CE}{2}$, deci $\mathcal{A}[ABCD] = 210$ cm^2.

PROBLEME PROPUSE

1. Fie triunghiul ABC, D mijlocul lui $[BC]$ și E mijlocul lui $[AD]$. Aflați $\mathcal{A}[ABC]$, știind că $\mathcal{A}[ABE] = 8$ cm^2.

2. Fie triunghiul ABC, D un punct pe (BC) astfel încât $DC = 3BD$ și E mijlocul lui $[AD]$. Aflați $\mathcal{A}[ABC]$, știind că $\mathcal{A}[ABE] = 5$ cm^2.

3. Se consideră triunghiul ABC în care $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm. Fie D mijlocul lui $[BC]$. Aflați distanțele de la D la dreptele AB și AC, știind că suma lor este de 7 cm.

4. Aflați aria unui triunghi echilateral, știind că suma distanțelor de la un punct situat în interiorul triunghiului la laturile triunghiului este de $2\sqrt{3}$ cm.

5. Fie triunghiul ABC, D mijlocul lui $[BC]$, E mijlocul lui $[CA]$, F mijlocul lui $[AB]$. Arătați că $\mathcal{A}[AEF] = \mathcal{A}[BFD] = \mathcal{A}[CDE] = \mathcal{A}[DEF] = \frac{\mathcal{A}[ABC]}{4}$.

6. Fie triunghiul ABC și punctele $E \in (AB)$, $F \in (AC)$ astfel încât $EF \parallel BC$. Aflați $\mathcal{A}[BCFE]$, știind că $AE = 2BE$ și că $\mathcal{A}[ABC] = 27$ cm^2.

7. Fie triunghiul ABC, M mijlocul lui $[BC]$, G centrul de greutate al triunghiului și D simetricul lui G față de M. Aflați $\mathcal{A}[ABC]$, știind că $\mathcal{A}[GBDC] = 20$ cm^2.

8. Fie triunghiul ABC, E mijlocul lui $[AB]$, F mijlocul lui $[AC]$ și G centrul de greutate al triunghiului. Arătați că $\mathcal{A}[AEGF] = \mathcal{A}[GBC]$.

9. Un triunghi dreptunghic isoscel are aria 18 cm^2. Aflați perimetrul triunghiului.

Scanned with OKEN Scanner

10. Fie triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$ și D mijlocul lui $[BC]$. Aflați $\mathcal{A}[ABC]$, știind că $AD = 12$ cm și $m(\hat{C}) = 30°$.

11. Aria unui triunghi dreptunghic este de 150 cm^2, iar lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este de 12 cm. Aflați perimetrul triunghiului.

12. Fie M mijlocul laturii AC a triunghiului ABC. Aflați $\mathcal{A}[ABC]$, știind că $AB = 5$ cm, $BC = 12$ cm și $BM = 6{,}5$ cm.

13. Aflați aria unui triunghi, știind că lungimile laturilor sale sunt direct proporționale cu 5, 12, 13 și că perimetrul triunghiului are 60 cm.

14. Aflați aria triunghiului dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$, știind că AB și AC sunt invers proporționale cu $0{,}1(6)$ și $0{,}08(3)$ și că lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei este de $2\sqrt{5}$ cm.

15. Se consideră triunghiului dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$ în care bisectoarea unghiului ABC este perpendiculară pe mediana corespunzătoare ipotenuzei. Aflați $\mathcal{A}[ABC]$, știind că $P_{ABC} = 3(3+\sqrt{3})$ cm.

16. Se consideră triunghiul isoscel ABC $([AB] \equiv [AC])$ în care $AB = 10$ cm și $m(\hat{A}) = 150°$. Aflați $\mathcal{A}[ABC]$.

17. Se consideră triunghiul isoscel ABC $([AB] \equiv [AC])$ în care $BC = 4\sqrt{3}$ cm și $m(\hat{A}) = 120°$. Aflați $\mathcal{A}[ABC]$.

18. Fie triunghiul isoscel ABC $([AB] \equiv [AC])$ și $BD \perp AC$. Aflați distanța BD, știind că $AB = 10$ cm și $BC = 12$ cm.

19. Aflați aria triunghiului ABC, știind că $AC = 4\sqrt{3}$ cm, $BC = 2AB$ și $m(\hat{B}) = 60°$.

20. Aflați aria triunghiului ABC, știind că $AB = 8$ cm, $AC = 2\sqrt{7}$ cm, $m(\hat{B}) = 30°$ și $m(\hat{C}) < 90°$.

21. Aflați aria triunghiului ABC, știind că $AB = 8$ cm, $m(\hat{A}) = 105°$ și $m(\hat{B}) = 30°$.

22. Fie triunghiul ABC, D mijlocul lui $[BC]$, O mijlocul lui $[AD]$, $\{E\} = BO \cap AC$ și $\{F\} = CO \cap AB$. Arătați că:

a) $EF \parallel BC$; b) $\mathcal{A}[OEF] = \frac{1}{18}\mathcal{A}[ABC]$.

23. Fie O centrul paralelogramului $ABCD$ și punctele $E \in (AB)$, $F \in (CD)$ astfel încât punctele E, O și F să fie coliniare. Aflați $\mathcal{A}[AECD]$, știind că $\mathcal{A}[ABCD] = 48$ cm^2 și că $\mathcal{A}[AECF] = 36$ cm^2.

24. Fie paralelogramul $ABCD$, $DE \perp AB$ și $DF \perp BC$. Aflați P_{ABCD}, știind că $DE = 6$ cm, $DF = 8$ cm și că $\mathcal{A}[ABCD] = 72$ cm^2.

25. Fie paralelogramul $ABCD$, $\{O\} = AC \cap BD$, $OE \perp AB$ și $OF \perp AD$ $(E \in AB,\ F \in AD)$. Aflați P_{ABCD}, știind că $OE = 3$ cm, $OF = 5$ cm și $\mathcal{A}[ABCD] = 30$ cm^2.

Scanned with OKEN Scanner

26. Se consideră paralelogramul $ABCD$ în care $AB = 2BC$. Fie M mijlocul lui $[AB]$ și $DE \perp AB\,(E \in AB)$. Arătați că $MC \cdot MD = AB \cdot DE$.

Indicație. Se arată că $MC \perp MD$.

27. Fie O centrul dreptunghiului $ABCD$. Aflați $\mathcal{A}[ABCD]$, știind că $AC = 12$ cm și că $m(\widehat{AOB}) = 120°$.

28. Două dreptunghiuri au ariile egale. Lungimea celui de al doilea este cu 8 cm mai mică decât lungimea primului, iar lățimea primului este jumătate din din lățimea celui de al doilea. Aflați lungimea fiecăruia dintre cele două dreptunghiuri.

29. Un dreptunghi are lungimea de 9 ori mai mare decât lățimea, iar un pătrat are lungimea unei laturi cât $\frac{2}{9}$ din lungimea dreptunghiului. Aflați aria fiecăruia din cele două patrulatere, știind că aria dreptunghiului este cu 45 cm^2 mai mare decât aria pătratului.

30. Se consideră rombul $ABCD$ în care $AB = 10$ cm și $m(\hat{A}) = 45°$. Aflați $\mathcal{A}[ABCD]$.

31. Fie triunghiul ABC și pătratul $DEFG$ astfel încât $D,\ E \in (BC),\ F \in (AC)$ și $G \in (AB)$. Aflați $\mathcal{A}[DEFG]$, știind că $\mathcal{A}[ABC] = 48$ cm^2 și $BC = 12$ cm.

32. Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ $(AB \parallel CD$ și $DA \perp AB)$, E mijlocul lui $[AD]$ și F mijlocul lui $[BC]$. Aflați $\mathcal{A}[ABCD]$, știind că $BC = 10$ cm, $CD = 5$ cm și $EF = 8$ cm.

33. Într-un trapez isoscel, aria este de 48 cm^2, lungimea înălțimii este de 4 cm, iar distanța dintre mijloacele diagonalelor, de 3 cm. Aflați perimetrul trapezului.

34. Un trapez isoscel și ortodiagonal are lungimea liniei mijlocii de 10 cm. Aflați aria trapezului.

35. Fie trapezul isoscel $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ în care $AB = 9$ cm, $AC = 6\sqrt{2}$ cm și $BC = 3$ cm. Aflați $\mathcal{A}[ABC]$.

36. Fie trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ în care $AB = 4\sqrt{2}$ cm, $BC = 2\sqrt{2}$ cm, $CA = 2\sqrt{6}$ cm și $m(\widehat{DAC}) = 15°$. Aflați $\mathcal{A}[ABCD]$.

37. Se consideră trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ în care $AB = 40$ cm, $BC = 15\sqrt{3}$ cm, $CD = 10$ cm și $DA = 15$ cm. Arătați că $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) = 90°$ și, apoi, aflați $\mathcal{A}[ABCD]$.

Indicație. Fie $\{E\} = AD \cap BC$. Se află distanțele EC și ED, iar, apoi, se arată că $m(\widehat{CED}) = 90°$.

38. Fie trapezul $ABCD$ $(AB \parallel CD)$, E mijlocul lui $[AD]$, F mijlocul lui $[BC]$ și O mijlocul lui $[EF]$. Perpendiculara în O pe EF intersectează AB în G și CD în H. Arătați că:

a) patrulaterul $EGFH$ este romb; b) $\mathcal{A}[EGFH] = \frac{1}{2}\mathcal{A}[ABCD]$.

39. Fie triunghiul ABC și punctul $D \in (BC)$. Paralela prin B la AD intersectează dreapta AC în E, iar paralela prin C la AD intersectează dreapta AB în F. Arătați că $\mathcal{A}[DEF] = 2\mathcal{A}[ABC]$.

Indicație. Fie $\{M\} = DE \cap AB$ și $\{N\} = DF \cap AC$. Se ține seama de faptul că

Scanned with OKEN Scanner

$\mathcal{A}[DEF] = \mathcal{A}[AMDN] + \mathcal{A}[AME] + \mathcal{A}[ANF] + \mathcal{A}[AEF]$ și că patrulaterele $ADBE$, $ADCF$ sunt trapeze.

40. Fie trapezul isoscel $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ și punctele $E \in (AD)$, $F \in (BC)$ astfel încât $[AE] \equiv [CF]$. Perpendicularele din E și F pe AB intersectează AB în G, respectiv în H. Arătați că $\mathcal{A}[EFHG] = \frac{1}{2}\mathcal{A}[ABCD]$.

RĂSPUNSURI

1. $32\ cm^2$ **2.** $40\ cm^2$ **3.** 3 cm și 4 cm **4.** $4\sqrt{3}\ cm^2$ **6.** $15\ cm^2$ **7.** $30\ cm^2$ **9.** $6+6\sqrt{2}$ cm **10.** $72\sqrt{3}\ cm^2$ **11.** 60 cm **12.** $30\ cm^2$ **13.** $120\ cm^2$ **14.** $25\ cm^2$ **15.** $4,5\sqrt{3}\ cm^2$ **16.** $25\ cm^2$ **17.** $4\sqrt{3}\ cm^2$ **18.** 9,6 cm **19.** $8\sqrt{3}\ cm^2$ **20.** $12\sqrt{3}\ cm^2$ **21.** $8+8\sqrt{3}\ cm^2$ **23.** $42\ cm^2$ **24.** 42 cm **25.** 16 cm **27.** $36\sqrt{3}\ cm^2$ **28.** 8 cm și 16 cm **29.** $81\ cm^2$ și $36\ cm^2$ **30.** $50\sqrt{2}\ cm^2$ **31.** $23,04\ cm^2$ **32.** $64\ cm^2$ **33.** 34 cm **34.** $100\ cm^2$ **35.** $16\sqrt{2}\ cm^2$ **36.** $7\sqrt{3}-3\ cm^2$ **37.** $187,5\sqrt{3}\ cm^2$.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL X

CERCUL

§1. ARCE ŞI COARDE ÎN CERC. MĂSURAREA UNGHIURILOR. TANGENTE LA CERC

PROBLEME REZOLVATE

1. **Se consideră cercul $\mathcal{C}$ de centru O şi rază $r = 7$ cm. Fie punctele A, B, C, D şi E astfel încât $OA = 5$ cm, $OB = 4\sqrt{3}$ cm, $OC = 7$ cm, $OD = 5\sqrt{2}$ cm şi $OE = 7{,}5$ cm. Precizaţi poziţia fiecăruia dintre aceste puncte faţă de cercul $\mathcal{C}$.**

Soluţie

Deoarece $5 < 7$ şi $4\sqrt{3} < 7$ (căci $\sqrt{3} < 1{,}75$), rezultă că $OA < r$ şi $OB < r$, deci punctele A şi B se află în interiorul cercului $\mathcal{C}$. Remarcând că $OC = r$, deducem că $C \in \mathcal{C}$. Întrucât $5\sqrt{2} > 7$ (fiindcă $\sqrt{2} > 1{,}4$) şi $7{,}5 > 7$, rezultă că $OD > r$ şi $OE > r$. În consecinţă, punctele D şi E se află în exteriorul cercului $\mathcal{C}$.

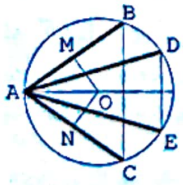
2. **Fie cercul $\mathcal{C}$ de centru O şi rază $r = 10$ cm, iar $[AB]$ şi $[CD]$ două coarde ale cercului astfel încât $d(O, AB) = 6$ cm şi $d(O, CD) = 8$ cm. Aflaţi lungimea fiecăreia dintre aceste coarde.**

Soluţie

Fie $OE \perp AB$ şi $OF \perp CD$ ($E \in AB$, $F \in CD$). Deoarece $AE^2 = OA^2 - OE^2$, rezultă că $AE = 8$ cm. Remarcând şi faptul că $AB = 2AE$ (căci $OE \perp AB$ implică $[EA] \equiv [EB]$), deducem că $AB = 16$ cm. Întrucât $CF^2 = OC^2 - OF^2$, rezultă că $CF = 6$ cm, deci $CD = 12$ cm.

3. **Fie A, B, C, D şi E cinci puncte distincte ale cercului $\mathcal{C}(O, r)$. Arătaţi că, dacă $[AB] \equiv [AC]$ şi $[AD] \equiv [AE]$, atunci $BC \parallel DE$.**

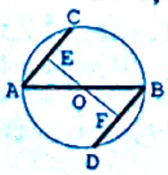
Soluţie



Evident, B şi C sunt de o parte şi de alta a dreptei AO. Fie $OM \perp AB$ şi $ON \perp AC$ ($M \in AB$, $N \in AC$). Deoarece $[AB] \equiv [AC]$, rezultă că $[OM] \equiv [ON]$, deci $[AO$ este bisectoarea unghiului BAC, ceea ce, împreună cu $[AB] \equiv [AC]$, implică $AO \perp BC$. Analog, arătăm că $AO \perp DE$. Drept urmare, $BC \parallel DE$.

4. **Prin extremităţile diametrului unui cerc se duc două coarde paralele. Arătaţi că aceste coarde sunt congruente.**

Soluţie



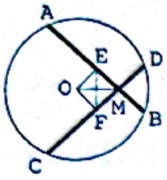
Fie O centrul cercului, $[AB]$ diametrul menţionat şi $[AC]$, $[BD]$ cele două coarde paralele. Ducem $OE \perp AC$ şi $OF \perp BD$. Întrucât $AC \parallel BD$, rezultă că $\widehat{CAB} \equiv \widehat{DBA}$, ceea ce este totuna cu $\widehat{EAO} \equiv \widehat{FBO}$. Remarcând şi faptul că $[OA] \equiv [OB]$, deducem că

Scanned with OKEN Scanner

$\Delta OAE \equiv \Delta OBF$ (I.U.), de unde $[OE] \equiv [OF]$. Cum $OE \perp AC$ şi $OF \perp BD$, rezultă că $[AC] \equiv [BD]$.

5. **Se consideră cercul $\mathcal{C}$ de centru O, punctul M situat în interiorul cercului şi coardele congruente $[AB]$, $[CD]$ astfel încât fiecare dintre ele să conţină punctul M. Fie E mijlocul lui $[AB]$ şi F mijlocul lui $[CD]$. Arătaţi că $EF \perp OM$.**

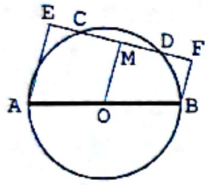
Soluţie



Deoarece O este centrul cercului şi $[EA] \equiv [EB]$, rezultă că $OE \perp AB$. Analog, arătăm că $OF \perp CD$. Ţinând seama şi de faptul că $[AB] \equiv [CD]$, deducem că $[OE] \equiv [OF]$. Totodată, $m(\widehat{OEM}) = m(\widehat{OFM}) = 90°$, deci $\Delta OEM \equiv \Delta OFM$ (I.C.), de unde $[ME] \equiv [MF]$. Având în vedere că $[OE] \equiv [OF]$ şi $[ME] \equiv [MF]$, conchidem că punctele O şi M se află pe mediatoarea segmentului EF, deci $OM \perp EF$.

6. **Fie $[AB]$ un diametru al cercului $\mathcal{C}(0, r)$ şi C, D două puncte ale cercului situate de aceeaşi parte a dreptei AB. Arătaţi că, dacă $E = \underset{CD}{pr} A$ şi $F = \underset{CD}{pr} B$, atunci $[CE] \equiv [DF]$.**

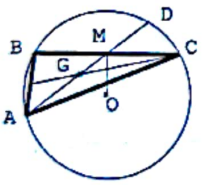
Soluţie



Să presupunem că $CD \nparallel AB$. Deoarece $AE \parallel BF$ (căci $AE \perp CD$ şi $BF \perp CD$), rezultă că patrulaterul $ABFE$ este trapez. Fie M piciorul perpendicularei din O pe CD. Întrucât $OM \parallel AE$ şi $[OA] \equiv [OB]$, rezultă că $[OM]$ este linie mijlocie în trapez, ceea ce implică $[ME] \equiv [MF]$. Remarcăm şi faptul că $[MC] \equiv [MD]$ (căci într-un cerc diametrul perpendicular pe o coardă a cercului împarte coarda în segmente congruente). Cum $CE = ME - MC$ şi $DF = MF - MD$, conchidem că $[CE] \equiv [DF]$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

7. **Fie cercul $\mathcal{C}$ şi G un punct oarecare din interiorul cercului. Arătaţi că există un triunghi înscris în cerc pentru care G să fie centrul de greutate.**

Soluţie

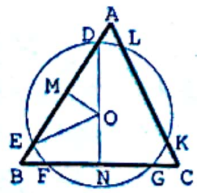


Fie $[AD]$ o coardă ce trece prin G astfel încât $AG < GD$ şi punctul $M \in (GD)$ cu proprietatea că $AG = 2GM$. Ducem prin M coarda BC astfel încât $BC \perp OM$. Deoarece O este centrul cercului, iar $OM \perp BC$, rezultă că $[BM] \equiv [MC]$, deci $[AM]$ este mediană în triunghiul ABC. Remarcând şi faptul că $G \in (AM)$, iar $AG = 2GM$, deducem că G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

8. **Se consideră triunghiul ABC şi cercul $\mathcal{C}$ care intersectează (AB) în D şi E, (BC) în F şi G, (CA) în K şi L. Arătaţi că, dacă au loc două dintre congruenţele $[AD] \equiv [BE]$, $[BF] \equiv [CG]$, $[CK] \equiv [AL]$, atunci centrul cercului $\mathcal{C}$ coincide cu centrul cercului circumscris triunghiului ABC.**

R.M.T. 2/1983

Soluţie



Pentru fixare, să presupunem că $[AD] \equiv [BE]$ şi $[BF] \equiv [CG]$. Fie O centrul cercului $\mathcal{C}$ şi M, N proiecţiile lui O pe AB, respectiv BC. Deoarece $[MD] \equiv [ME]$ (căci diametrul perpendicular pe o coardă a cercului împarte coarda în segmente congruente), $[DA] \equiv [EB]$, $MA = MD + DA$ şi $MB = ME + EB$, rezultă

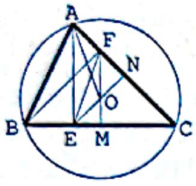
Scanned with OKEN Scanner

că $[MA] \equiv [MB]$. Remarcând și faptul că $OM \perp AB$, conchidem că dreapta OM este mediatoarea laturii AB. Analog, arătăm că dreapta ON este mediatoarea laturii BC. Drept urmare, punctul O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, ceea ce trebuia demonstrat.

9. **Se consideră triunghiul ascuțitunghic și neisoscel ABC în care $m(\hat{C}) = 45°$. Fie $\mathcal{C}$ cercul circumscris triunghiului, $AE \perp BC$, $BF \perp CA$ ($E \in BC$, $F \in CA$), M mijlocul lui $[BC]$, N mijlocul lui $[CA]$, $\{O\} = EN \cap FM$ și r raza cercului $\mathcal{C}$. Arătați că:**

a) O este centrul cercului $\mathcal{C}$; **b) $EF = r$.**

Soluție

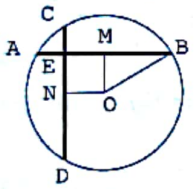


a) Deoarece $m(\widehat{AEC}) = 90°$ și $m(\widehat{ECA}) = 45°$, rezultă că $m(\widehat{EAC}) = 45°$, ceea ce implică $\widehat{ECA} \equiv \widehat{EAC}$, de unde $[EA] \equiv [EC]$. Remarcând și faptul că $[AN] \equiv [NC]$, deducem că $EN \perp AC$. Prin urmare, EN este mediatoarea laturii AC. Analog, arătăm că FM este mediatoarea laturii BC. Cum $\{O\} = EN \cap FM$, conchidem că O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

b) Remarcăm, mai întâi, că $FO \parallel AE$ (căci $FM \perp BC$ și $AE \perp BC$). Întrucât $m(\widehat{ENA}) = 90°$ și $m(\widehat{NAE}) = 45°$, rezultă că $m(\widehat{NEA}) = 45°$, de unde $\widehat{NAE} \equiv \widehat{NEA}$. Prin urmare, patrulaterul $AEOF$ este trapez isoscel. Având în vedere că diagonalele unui trapez isoscel sunt congruente, conchidem că $[EF] \equiv [OA]$, deci $EF = r$.

10. Două coarde ale unui cerc, congruente și perpendiculare între ele, se împart fiecare prin punctul lor de intersecție în segmente de lungime 2 cm și 14 cm. Aflați raza cercului.

Soluție



Fie $\mathcal{C}(O, r)$ cercul considerat, $[AB]$ și $[CD]$ coardele menționate în enunț, $\{E\} = AB \cap CD$, $OM \perp AB$, $ON \perp CD$ ($M \in AB$, $N \in CD$). Pentru fixare, să presupunem că $AE = 2$ cm și $EB = 14$ cm. Cum $AB = AE + EB$, rezultă că $AB = 16$ cm. Ținând seama și de faptul că $[AM] \equiv [MB]$ (căci $OM \perp AB$), deducem că $AM = MB = 8$ cm, de unde $EM = 6$ cm (fiindcă $EM = AM - AE$). Întrucât $[AB] \equiv [CD]$, iar $OM \perp AB$ și $ON \perp CD$, rezultă că $[OM] \equiv [ON]$, ceea ce, împreună cu $m(\widehat{OME}) = m(\widehat{MEN}) = m(\widehat{ENO}) = 90°$, arată că patrulaterul $OMEN$ este pătrat. Prin urmare, $OM = EM = 6$ cm. Remarcând faptul că $r^2 = OM^2 + MB^2$ (din triunghiul OMB), conchidem că $r = 10$ cm.

11. Fie $[AB]$ și $[CD]$ două coarde ale unui cerc astfel încât $[AB] \cap [CD] = \varnothing$. Arătați că, dacă $\widehat{AC} \equiv \widehat{BD}$, atunci $AB \parallel CD$.

Soluție

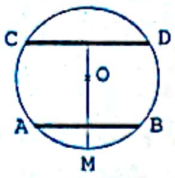
Pentru fixare, să presupunem că punctele A și C se află de aceeași parte a diametrului perpendicular pe AB. Deoarece $m(\widehat{BAD}) = \frac{m(\widehat{BD})}{2}$, $m(\widehat{ADC}) = \frac{m(\widehat{AC})}{2}$ și $\widehat{BD} \equiv \widehat{AC}$, rezultă că $\widehat{BAD} \equiv \widehat{ADC}$. Remarcând faptul că aceste unghiuri se obțin prin tăierea dreptelor AB și CD cu secanta AD și, totodată, că sunt alterne interne, deducem că $AB \parallel CD$.

12. Arătați că în orice cerc arcele cuprinse între două coarde paralele sunt congruente.

Soluție

Fie O centrul cercului considerat, $[AB]$ și $[CD]$ cele două coarde paralele și

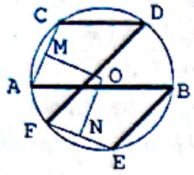
Scanned with OKEN Scanner



M mijlocul arcului AB cu proprietatea că $m(\widehat{AB}) \leq 180°$ (vezi figura alăturată). Deoarece $OM \perp AB$ și $AB \parallel CD$, rezultă că $OM \perp CD$, ceea ce implică $m(\widehat{CAM}) = m(\widehat{DBM})$. Remarcând și faptul că $m(\widehat{AC}) = m(\widehat{CAM}) - m(\widehat{AM})$, $m(\widehat{BD}) = m(\widehat{DBM}) - m(\widehat{BM})$, deducem că $m(\widehat{AC}) = m(\widehat{BD})$, ceea ce conduce la $\widehat{AC} \equiv \widehat{BD}$.

13. **Se consideră cercul $\mathcal{C}(0, r)$ și coardele AB, CD, BE, DF astfel încât $AB \parallel CD$ și $BE \parallel DF$. Fie M mijlocul lui $[AC]$ și N mijlocul lui $[EF]$. Arătați că $[OM] \equiv [ON]$.**

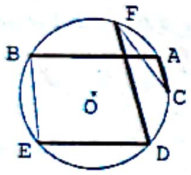
Soluție



Întrucât $AB \parallel CD$ și $BE \parallel DF$, rezultă că $\widehat{AC} \equiv \widehat{BD}$, respectiv $\widehat{BD} \equiv \widehat{EF}$, de unde $\widehat{AC} \equiv \widehat{EF}$. Drept urmare, $[AC] \equiv [EF]$. Remarcând și faptul că O este centrul cercului considerat, iar $OM \perp AC$ și $ON \perp EF$, deducem că $[OM] \equiv [ON]$ (căci într-un cerc, două coarde congruente sunt egal depărtate de centrul cercului).

14. **În cercul $\mathcal{C}(0, r)$ se consideră coardele AB, AC, DE și DF. Arătați că, dacă $AB \parallel DE$ și $AC \parallel DF$, atunci $[BE] \equiv [CF]$.**

Soluție



Deoarece $m(\widehat{CAF}) = m(\widehat{CA}) + m(\widehat{AF})$, iar $\widehat{AF} \equiv \widehat{CD}$ (căci $AC \parallel DF$), rezultă că $m(\widehat{CAF}) = m(\widehat{CA}) + m(\widehat{CD})$, ceea ce conduce la $m(\widehat{CAF}) = m(\widehat{ACD})$, de unde $\widehat{ACD} \equiv \widehat{CAF}$. Remarcând și faptul că $\widehat{ACD} \equiv \widehat{BE}$ (fiindcă $AB \parallel DE$), deducem că $\widehat{BE} \equiv \widehat{CAF}$, ceea ce implică $[BE] \equiv [CF]$.

15. **Fie A și B două puncte distincte ale cercului $\mathcal{C}(0, r)$. Aflați r, știind că $AB = 6\sqrt{3}$ cm și că $m(\widehat{AB}) = 120°$.**

Soluție

Fie M mijlocul lui $[AB]$.

Deoarece $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AB})$, rezultă că $m(\widehat{AOB}) = 120°$. Remarcând faptul că $[OM$ este bisectoarea unghiului AOB, deducem că $m(\widehat{AOM}) = 60°$, ceea ce implică $m(\widehat{OAM}) = 30°$ (căci $m(\widehat{OMA}) = 90°$). Drept urmare, $OM = \frac{OA}{2} = \frac{r}{2}$.

Totodată, $AO^2 - OM^2 = AM^2$, de unde $\frac{3r^2}{4} = 27$, deci $r = 6$ cm.

16. **Fie A, B, C trei puncte distincte ale cercului $\mathcal{C}(0, r)$ ($B \in \widehat{AC}$) și D mijlocul lui $[BC]$. Aflați $m(\widehat{BC})$, știind că $m(\widehat{AB}) = 90°$, $AB = 6\sqrt{2}$ cm și $OD = 3$ cm.**

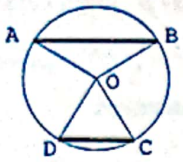
Soluție

Întrucât $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AB})$, rezultă că $m(\widehat{AOB}) = 90°$, ceea ce implică $OA^2 + OB^2 = AB^2$, de unde $OB = 6$ cm. Remarcând că $m(\widehat{ODB}) = 90°$ (căci $[DB] \equiv [DC]$) și că $OD = \frac{OB}{2}$ (fiindcă $OD = 3$ cm și $OB = 6$ cm), deducem că $m(\widehat{OBD}) = 30°$, ceea ce implică $m(\widehat{BOD}) = 60°$. Totodată, $m(\widehat{BOC}) = 2m(\widehat{BOD})$, deci $m(\widehat{BOC}) = 120°$. Ținând seama și de faptul că $m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{BC})$, conchidem că $m(\widehat{BC}) = 120°$.

Scanned with OKEN Scanner

17. Fie O centrul unui cerc și $[AB]$, $[CD]$ două coarde ale cercului. Arătați că, dacă $AB \parallel CD$, $m(\widehat{AOB}) = 120°$, $m(\widehat{COD}) = 60°$, iar punctul D aparține arcului mic AC și este situat în semiplanul limitat de dreapta AB și care conține punctul C, atunci $OA \perp OD$ și $OB \perp OC$.

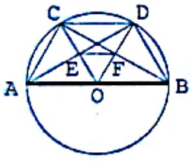
Soluție



Deoarece $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AB})$ și $m(\widehat{COD}) = m(\widehat{CD})$, rezultă că $m(\widehat{AB}) = 120°$ și $m(\widehat{CD}) = 60°$. Remarcând și faptul că $m(\widehat{AD}) + m(\widehat{BC}) = 360° - [m(\widehat{AB}) + m(\widehat{CD})]$, deducem că $m(\widehat{AD}) + m(\widehat{BC}) = 180°$. Totodată, $\widehat{AD} \equiv \widehat{BC}$ (căci $AB \parallel CD$), deci $m(\widehat{AD}) = m(\widehat{BC}) = 90°$ ($\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{AD}$ și $\widehat{BC}$ reprezintă arce mici ale cercului considerat). Cum $m(\widehat{AOD}) = m(\widehat{AD})$, $m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{BC})$, rezultă că $m(\widehat{AOD}) = m(\widehat{BOC}) = 90°$, ceea ce conduce la $OA \perp OD$ și $OB \perp OC$.

18. Se consideră cercul $\mathcal{C}(0, r)$, $[AB]$ un diametru al cercului și punctele C, D pe cerc astfel încât acestea să fie situate de aceeași parte a dreptei AB, iar $\widehat{AC} \equiv \widehat{CD} \equiv \widehat{DB}$. Fie $\{E\} = AD \cap CO$ și $\{F\} = BC \cap DO$. Arătați că $EF = \frac{r}{2}$.

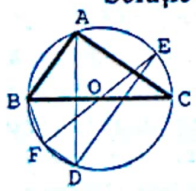
Soluție



Întrucât $m(\widehat{AB}) = 180°$, iar $\widehat{AC} \equiv \widehat{CD} \equiv \widehat{DB}$, rezultă că $m(\widehat{CD}) = 60°$, ceea ce implică $m(\widehat{COD}) = 60°$ (căci $m(\widehat{COD}) = m(\widehat{CD})$). Remarcând și faptul că $[OC] \equiv [OD]$, deducem că triunghiul COD este echilateral, deci $CD = OC = r$. Deoarece $CD \parallel AO$ (fiindcă $\widehat{AC} \equiv \widehat{DB}$ implică $CD \parallel AB$), iar $[CD] \equiv [AO]$, rezultă că patrulaterul $ACDO$ este paralelogram, de unde $[EO] \equiv [EC]$. Analog, arătăm că $[FO] \equiv [FD]$. Drept urmare, $[EF]$ este linie mijlocie în triunghiul OCD, ceea ce conduce la $EF = \frac{CD}{2} = \frac{r}{2}$.

19. Fie $\mathcal{C}(0, r)$ cercul circumscris triunghiului dreptunghic neisoscel ABC ($m(\hat{A}) = 90°$) și D cea de a doua intersecție cu $\mathcal{C}$ a perpendicularei din A pe BC. Paralelele prin D la AB și AC taie, din nou, cercul $\mathcal{C}$ în E, respectiv în F. Arătați că $[BF] \equiv [CE]$.

Soluție



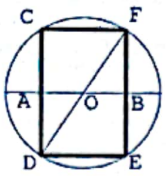
Deoarece $m(\widehat{BAC}) = 90°$, rezultă că $[BC]$ este diametru al cercului $\mathcal{C}(0, r)$, deci $O \in (BC)$. Având în vedere și faptul că $\widehat{EDF} \equiv \widehat{BAC}$ (căci $DE \parallel AB$ și $DF \parallel AC$), deducem că $m(\widehat{EDF}) = 90°$, ceea ce arată că și $[EF]$ este diametru al cercului $\mathcal{C}(0, r)$, de unde $O \in (EF)$. Drept urmare, $\widehat{BOF} \equiv \widehat{COE}$. Totodată, $m(\widehat{BOF}) = m(\widehat{BF})$ și $m(\widehat{COE}) = m(\widehat{CE})$, deci $\widehat{BF} \equiv \widehat{CE}$, ceea ce implică $[BF] \equiv [CE]$.

20. Pe un diametru al cercului $\mathcal{C}(0, r)$ se consideră punctele distincte A și B astfel încât $[OA] \equiv [OB]$ (A și B diferite de extremitățile diametrului). Perpendiculara în A pe AB intersectează cercul în C și D, iar perpendiculara în B pe AB intersectează cercul în E și F (C și F de aceeași parte a dreptei AB). Arătați că patrulaterul $CDEF$ este dreptunghi.

Soluție

Întrucât $OA \perp CD$, $OB \perp EF$ și $[OA] \equiv [OB]$, rezultă că $[CD] \equiv [EF]$. Totodată, $CD \parallel EF$, deci patrulaterul $CDEF$ este paralelogram. Pe de altă parte,

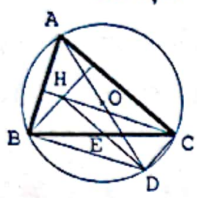
Scanned with OKEN Scanner



$[AO] \equiv [BO]$ şi $[OD] \equiv [OF]$, ceea ce implică $\Delta OAD \equiv \Delta OBF$ (I.C.), de unde $\widehat{DOA} \equiv \widehat{FOB}$. Cum semidreptele OD şi OF sunt de o parte şi de alta a dreptei AB, rezultă că $O \in DF$. Prin urmare, $[DF]$ este diametru al cercului considerat, ceea ce conduce la $m(\widehat{DCF}) = 90°$ şi, deci, patrulaterul $CDEF$ este dreptunghi.

21. **Fie $\mathcal{C}(0, r)$ cercul circumscris triunghiului ABC, D punctul diametral opus la A, E mijlocul lui $[BC]$ şi H ortocentrul triunghiului. Arătaţi că punctele D, E şi H sunt coliniare.**

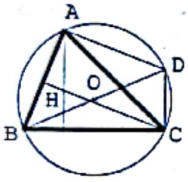
Soluţie



Deoarece $[AD]$ este diametru al cercului $\mathcal{C}$, rezultă că $m(\widehat{ABD}) = 90°$, ceea ce implică $DB \perp BA$. Remarcând că punctul H este ortocentrul triunghiului ABC, deducem că $CH \perp BA$. Drept urmare, $DB \parallel CH$. Analog, arătăm că $DC \perp CA$ şi $BH \perp CA$, de unde $DC \parallel BH$. Ţinând seama de cele stabilite anterior, patrulaterul $BDCH$ este paralelogram. Cum E este centrul paralelogramului (căci $[EB] \equiv [EC]$), conchidem că $E \in DH$, ceea ce trebuia demonstrat.

22. **Fie $\mathcal{C}(0, r)$ cercul circumscris triunghiului ABC şi H ortocentrul triunghiului. Aflaţi distanţa AH, ştiind că $BC = 8$ cm şi $r = 5$ cm.**

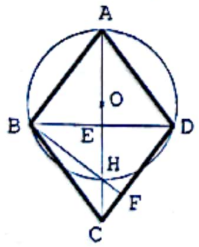
Soluţie



Fie D punctul diametral opus lui B. Deoarece $[BD]$ este diametru al cercului $\mathcal{C}(0, r)$, rezultă că $m(\widehat{BCD}) = 90°$, de unde $DC \perp BC$. Remarcând şi faptul că $AH \perp BC$ (căci H este ortocentrul triunghiului ABC), deducem că $DC \parallel AH$. Analog, arătăm că $DA \parallel CH$. Drept urmare, patrulaterul $AHCD$ este paralelogram, ceea ce implică $[AH] \equiv [DC]$. Totodată, $DC^2 = BD^2 - BC^2$, de unde $DC = 6$ cm (fiindcă $BD = 2r = 10$ cm), deci $AH = 6$ cm.

23. **Fie rombul $ABCD$ şi H punctul în care cercul circumscris triunghiului ABD intersectează (AC). Arătaţi că H este ortocentrul triunghiului BCD.**

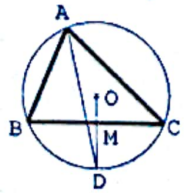
Soluţie



Fie $\{E\} = AC \cap BD$, O centrul cercului circumscris triunghiului ABD şi $\{F\} = BH \cap CD$. Întrucât $[BE] \equiv [ED]$ şi $AE \perp BD$ (căci patrulaterul $ABCD$ este romb), rezultă că AE este mediatoarea segmentului BD, ceea ce arată că $O \in AE$ (fiindcă centrul cercului circumscris unui triunghi este punctul de concurenţă a mediatoarelor laturilor triunghiului). Drept urmare, $[AH]$ este diametru al cercului considerat. Rezultă că $m(\widehat{HBA}) = 90°$, ceea ce implică $BF \perp BA$. Ţinând seama şi de faptul că $BA \parallel CD$, deducem că $BF \perp CD$. Totodată, $CE \perp BD$ şi $\{H\} = BF \cap CE$, deci punctul H este ortocentrul triunghiului BCD.

24. **Se consideră triunghiul ABC în care $AB \neq AC$. Arătaţi că bisectoarea unghiului BAC intersectează mediatoarea laturii BC într-un punct situat pe cercul circumscris triunghiului ABC.**

Soluţie



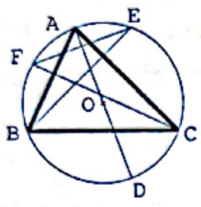
Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC şi D punctul în care bisectoarea unghiului BAC intersectează a doua oară cercul menţionat. Deoarece $m(\widehat{BAD}) = \frac{m(\widehat{BD})}{2}$,

Scanned with OKEN Scanner

$m(\widehat{CAD}) = \frac{m(\widehat{DC})}{2}$ și $\widehat{BAD} \equiv \widehat{CAD}$, rezultă că $\widehat{BD} \equiv \widehat{DC}$. Deducem imediat că $OD \perp BC$ și $[BM] \equiv [MC]$ ($\{M\} = BC \cap OD$). Prin urmare, OD este mediatoarea laturii BC, iar rezolvarea problemei este încheiată.

25. **Fie $\mathcal{C}(0, r)$ cercul circumscris triunghiului ABC. Înălțimile duse din B și C intersectează (a doua oară) cercul în E, respectiv în F. Arătați că $EF \perp AO$.**

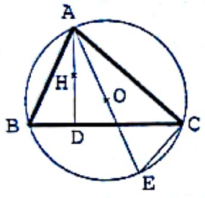
Soluție



Fie D punctul diametral opus lui A. Deoarece $\widehat{ABE} \equiv \widehat{ACF}$ (căci $BA \perp CF$ și $BE \perp CA$), iar $m(\widehat{ABE}) = \frac{m(\widehat{AE})}{2}$ și $m(\widehat{ACF}) = \frac{m(\widehat{AF})}{2}$, rezultă că $\widehat{AE} \equiv \widehat{AF}$. Ținând seama și de faptul că $[AD]$ este diametru al cercului $\mathcal{C}$, deducem că $AD \perp EF$, ceea ce este totuna cu $EF \perp AO$.

26. **Fie H ortocentrul triunghiului ascuțitunghic ABC și O centrul cercului circumscris triunghiului. Arătați că $\widehat{BAH} \equiv \widehat{CAO}$.**

Soluție



Fie D intersecția dreptei AH cu dreapta BC și E punctul diametral opus lui E. Deoarece $AD \perp DB$ (căci H este punctul de intersecție a înălțimilor triunghiului ABC), rezultă că $m(\widehat{BAD}) = 90° - m(\widehat{ABC})$, de unde $m(\widehat{BAD}) = 90° - \frac{m(\widehat{AC})}{2}$ ($\widehat{AC}$ arc mic). Pe de altă parte, $m(\widehat{CAE}) = 90° - m(\widehat{AEC})$ (din faptul că $[AE]$ este diametru al cercului rezultă că $m(\widehat{ACE}) = 90°$), de unde $m(\widehat{CAE}) = 90° - \frac{m(\widehat{AC})}{2}$. Drept urmare, $\widehat{BAD} \equiv \widehat{CAE}$, ceea ce este totuna cu $\widehat{BAH} \equiv \widehat{CAO}$.

27. **Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC și D mijlocul arcului BC (care nu conține punctul A). Arătați că, dacă $m(\widehat{ABC}) > m(\widehat{ACB})$, atunci $m(\widehat{ABC}) - m(\widehat{ACB}) = 2m(\widehat{ADO})$.**

Soluție

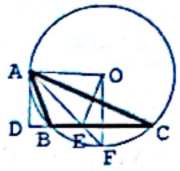
Fie E punctul diametral opus lui D. Evident, $m(\widehat{ADO}) = m(\widehat{ADE}) = \frac{m(\widehat{AE})}{2}$. Pe de altă parte, $m(\widehat{ABC}) - m(\widehat{ACB}) = \frac{m(\widehat{AEC}) - m(\widehat{AB})}{2} = \frac{m(\widehat{AE}) + m(\widehat{EC}) - m(\widehat{AB})}{2}$. Totodată, $m(\widehat{EC}) - m(\widehat{AB}) = 180° - m(\widehat{DC}) - \left[180° - (m(\widehat{AE}) + m(\widehat{DB}))\right] = m(\widehat{AE})$ (căci $m(\widehat{DC}) = m(\widehat{DB})$), deci $m(\widehat{ABC}) - m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{AE})$. Astfel, rezolvarea problemei este încheiată.

28. **Fie triunghiul ABC, $AD \perp BC (D \in BC)$ și $\mathcal{C}(0, r)$ cercul circumscris triunghiului. Bisectoarea unghiului BAC intersectează latura BC în E și cercul $\mathcal{C}(0, r)$ în F. Arătați că: a) $OF \parallel AD$; b) dacă $EO \perp OA$, atunci $AD = r$.**

Soluție

a) Întrucât $[AF$ este bisectoarea unghiului BAC, rezultă că $\widehat{BF} \equiv \widehat{FC}$. Remarcând și faptul că O este centrul cercului considerat, deducem că $OF \perp BC$, ceea ce, împreună cu $AD \perp BC$, conduce la $OF \parallel AD$.

Scanned with OKEN Scanner



b) Deoarece $OF \parallel AD$, rezultă că $\widehat{OFA} \equiv \widehat{DAF}$. Totodată, $\widehat{OFA} \equiv \widehat{OAF}$ (căci $[OF] \equiv [OA]$), deci $\widehat{DAF} \equiv \widehat{OAF}$, ceea ce este totuna cu $\widehat{DAE} \equiv \widehat{OAE}$. Deducem imediat că $\Delta ADE \equiv \Delta AOE$ (I.U.), de unde $AD = AO = r$.

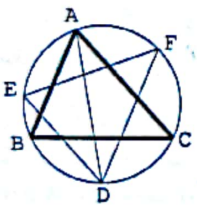
29. **Se consideră triunghiul ABC și punctele $D, E \in (BC)$ astfel încât $D \in (BE)$ și $[BD] \equiv [CE]$. Fie F, G punctele în care dreptele AD, respectiv AE intersectează, din nou, cercul circumscris triunghiului ABC. Arătați că, dacă $\widehat{BF} \equiv \widehat{CG}$, atunci $[AB] \equiv [AC]$.**

Soluție

Deoarece $\widehat{BF} \equiv \widehat{CG}$, rezultă că $[BF] \equiv [CG]$. Remarcând faptul că $m(\widehat{FBC}) = \frac{m(\widehat{FGC})}{2}$, $m(\widehat{GCB}) = \frac{m(\widehat{GFB})}{2}$ și $\widehat{FGC} \equiv \widehat{GFB}$ (căci $m(\widehat{FGC}) = m(\widehat{FG}) + m(\widehat{GC})$, $m(\widehat{GFB}) = m(\widehat{GF}) + m(\widehat{FB})$ și $\widehat{GC} \equiv \widehat{FB}$), deducem că $\widehat{FBC} \equiv \widehat{GCB}$, ceea ce este totuna cu $\widehat{FBD} \equiv \widehat{GCE}$. Totodată, $[BD] \equiv [CE]$ și $[BF] \equiv [CG]$, deci $\Delta BDF \equiv \Delta CEG$. Rezultă că $\widehat{BFD} \equiv \widehat{CGE}$, de unde $\widehat{BFA} \equiv \widehat{CGA}$. Cum $m(\widehat{BFA}) = \frac{m(\widehat{AB})}{2}$ și $m(\widehat{CGA}) = \frac{m(\widehat{AC})}{2}$, conchidem că $\widehat{AB} \equiv \widehat{AC}$, ceea ce implică $[AB] \equiv [AC]$.

30. **Fie $\mathcal{C}$ cercul circumscris unui triunghi ABC. Bisectoarea unghiului BAC intersectează, din nou, $\mathcal{C}$ în D, iar paralelele prin D la AC și AB taie, din nou, $\mathcal{C}$ în E, respectiv F. Arătați că $\Delta DEF \equiv \Delta ABC$.**

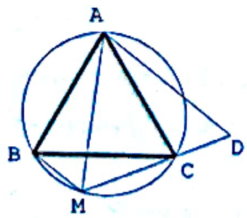
Soluție



Deoarece $DE \parallel AC$ și $DF \parallel AB$, rezultă că $\widehat{EDF} \equiv \widehat{BAC}$. Întrucât $m(\widehat{BAD}) = \frac{m(\widehat{BD})}{2}$, $m(\widehat{DAC}) = \frac{m(\widehat{DC})}{2}$ și $\widehat{BAD} \equiv \widehat{DAC}$ (căci $[AD$ este bisectoarea unghiului BAC), rezultă că $\widehat{BD} \equiv \widehat{DC}$. Pe de altă parte, $\widehat{DC} \equiv \widehat{AE}$ (căci $DE \parallel AC$), deci $\widehat{BD} \equiv \widehat{AE}$. Remarcând și faptul că $m(\widehat{DBE}) = m(\widehat{BD}) + m(\widehat{BE})$, iar $m(\widehat{AEB}) = m(\widehat{AE}) + m(\widehat{BE})$, deducem că $m(\widehat{DBE}) = m(\widehat{AEB})$, ceea ce implică $\widehat{DBE} \equiv \widehat{AEB}$, deci $[DE] \equiv [AB]$. Analog, arătăm că $[DF] \equiv [AC]$. Prin urmare, $\Delta DEF \equiv \Delta ABC$ (L.U.L.), ceea ce trebuia demonstrat.

31. **Fie M un punct pe arcul mic BC al cercului circumscris triunghiului echilateral ABC ($M \neq B$ și $M \neq C$). Arătați că $MA = MB + MC$.**

Soluție



Fie D un punct pe $(MC$ astfel încât $C \in (MD)$, iar $[CD] \equiv [BM]$. Întrucât $m(\widehat{ACD}) = 180° - m(\widehat{ACM}) = 180° - \frac{m(\widehat{ABM})}{2} = \frac{360° - m(\widehat{ABM})}{2} = \frac{m(\widehat{ACM})}{2} = m(\widehat{ABM})$, rezultă că $\widehat{ACD} \equiv \widehat{ABM}$. Ținând seama și de faptul că $[AB] \equiv [AC]$, $[BM] \equiv [CD]$, deducem că $\Delta ABM \equiv \Delta ACD$, de unde $[AM] \equiv [AD]$ și $\widehat{BAM} \equiv \widehat{CAD}$. Deoarece $m(\widehat{MAD}) = m(\widehat{MAC}) + m(\widehat{CAD})$, rezultă că $m(\widehat{MAD}) = m(\widehat{MAC}) + m(\widehat{BAM}) = m(\widehat{BAC}) = 60°$. Având în vedere cele stabilite anterior, triunghiul AMD este echilateral, de unde $MA = MD$, ceea ce împreună cu $MD = MC + CD = MC + MB$, conduce la $MA = MB + MC$.

Scanned with OKEN Scanner

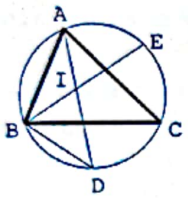
32. **Arătați că măsura unui unghi cu vârful în interiorul unui cerc este egală cu semisuma măsurilor arcelor de cerc cuprinse între laturile unghiului și prelungirile acestora.**

Soluție

Fie cercul $\mathcal{C}$, $[AC]$ și $[BD]$ două coarde concurente ale cercului $\mathcal{C}$ și E punctul lor de intersecție. Cum $\widehat{AEB}$ este unghi exterior al triunghiului EAD, rezultă că $m(\widehat{AEB}) = m(\widehat{EDA}) + m(\widehat{EAD})$. Totodată, $m(\widehat{EDA}) = m(\widehat{BDA}) = \frac{m(\widehat{AB})}{2}$ și $m(\widehat{EAD}) = m(\widehat{CAD}) = \frac{m(\widehat{CD})}{2}$, deci $m(\widehat{AEB}) = \frac{m(\widehat{AB}) + m(\widehat{CD})}{2}$.

33. **Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC și D cea de a doua intersecție a dreptei AI cu cercul circumscris triunghiului. Arătați că $[DI] \equiv [DB]$.**

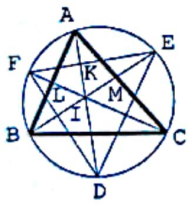
Soluție



Deoarece I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, rezultă că $[AI$ este bisectoarea unghiului BAC și $[BI$ este bisectoarea unghiului ABC. Fie E cea de a doua intersecție a dreptei BI cu cercul circumscris triunghiului ABC. Întrucât $\widehat{BAD} \equiv \widehat{CAD}$, rezultă că $\widehat{DB} \equiv \widehat{DC}$ (căci $m(\widehat{BAD}) = \frac{m(\widehat{DB})}{2}$ și $m(\widehat{CAD}) = \frac{m(\widehat{DC})}{2}$). Analog, $\widehat{EA} \equiv \widehat{EC}$. Pe de altă parte, $m(\widehat{IBD}) = m(\widehat{EBD}) = \frac{m(\widehat{EC}) + m(\widehat{DC})}{2}$ (fiindcă $\widehat{EBD}$ este unghi înscris în cerc) și $m(\widehat{BID}) = \frac{m(\widehat{EA}) + m(\widehat{DB})}{2}$ (căci $\widehat{BID}$ este unghi cu vârful în interiorul cercului). Drept urmare, $\widehat{IBD} \equiv \widehat{BID}$, ceea ce implică $[DI] \equiv [DB]$.

34. **Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Dreptele AI, BI și CI intersectează, din nou, cercul circumscris triunghiului ABC în D, E, respectiv F. Arătați că punctul I este ortocentrul triunghiului DEF.**

Soluție



Fie $\{K\} = AD \cap EF$, $\{L\} = BE \cap FD$ și $\{M\} = CF \cap DE$. Deoarece $\widehat{DKE}$ este unghi cu vârful în interiorul cercului circumscris triunghiului ABC, rezultă că $2m(\widehat{DKE}) = m(\widehat{DCE}) + m(\widehat{AF})$. Totodată, $m(\widehat{DCE}) + m(\widehat{AF}) = m(\widehat{DC}) + m(\widehat{CE}) + m(\widehat{AF}) = \frac{m(\widehat{BDC})}{2} + \frac{m(\widehat{CEA})}{2} + \frac{m(\widehat{AFB})}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$ (căci $\widehat{DB} \equiv \widehat{DC}$, $\widehat{EC} \equiv \widehat{EA}$ și $\widehat{FA} \equiv \widehat{FB}$). Prin urmare, $m(\widehat{DKE}) = 90^\circ$, ceea ce implică $DK \perp EF$. Analog, arătăm că $EL \perp FD$. Remarcând și faptul că $DK \cap EL = \{I\}$, conchidem că punctul I este ortocentrul triunghiului DEF.

35. **Fie A, B două puncte distincte ale cercului $\mathcal{C}(0, r)$ $(m(\widehat{AB}) \neq 180^\circ)$ și C piciorul perpendicularei din B pe tangenta în A la cerc. Arătați că $[BA$ este bisectoarea unghiului OBC.**

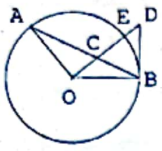
Soluție

Deoarece $OA \perp AC$ (căci AC este tangentă la cercul $\mathcal{C}(0, r)$, iar $BC \perp AC$, rezultă că $OA \parallel BC$. Drept urmare, $\widehat{CBA} \equiv \widehat{OAB}$ (unghiuri alterne interne). Remarcând și faptul că $\widehat{OAB} \equiv \widehat{OBA}$ (fiindcă $[OA] \equiv [OB]$), deducem că $\widehat{CBA} \equiv \widehat{OBA}$, ceea ce arată că $[BA$ este bisectoarea unghiului OBC.

Scanned with OKEN Scanner

36. Fie A, B două puncte situate pe cercul $\mathcal{C}(0, r)$ astfel încât $m(\widehat{AB}) > 90°$ ($\widehat{AB}$ arc mic). Perpendiculara în O pe OA intersectează dreapta AB în C și tangenta în B la cercul $\mathcal{C}(0, r)$ în D. Arătați că $[DB] \equiv [DC]$.

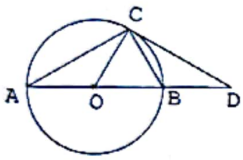
Soluție



Deoarece $DB \perp BO$ (fiindcă dreapta DB este tangentă la cercul $\mathcal{C}(0, r)$, rezultă că $m(\widehat{DBC}) = 90° - m(\widehat{OBC})$. Pe de altă parte, $m(\widehat{ACO}) = 90° - m(\widehat{OAC})$ (din triunghiul dreptunghic AOC), iar $\widehat{OAC} \equiv \widehat{OBC}$ (căci $[OA] \equiv [OB]$), deci $\widehat{DBC} \equiv \widehat{ACO}$. Remarcând și faptul că $\widehat{DCB} \equiv \widehat{ACO}$, deducem că $\widehat{DBC} \equiv \widehat{DCB}$, de unde $[DB] \equiv [DC]$.

37. Fie A, B două puncte diametral opuse ale cercului $\mathcal{C}(0, r)$ și C un punct de pe cerc astfel încât $m(\widehat{AC}) = 120°$. Tangenta în C la cerc intersectează AB în D. Arătați că $BD = r$.

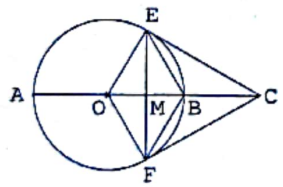
Soluție



Întrucât $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{AC})$, rezultă că $m(\widehat{AOC}) = 120°$, de unde $m(\widehat{COB}) = 60°$, ceea ce este totuna cu $m(\widehat{COD}) = 60°$. Remarcând că $m(\widehat{OCD}) = 90°$ (căci tangenta la cerc este perpendiculară pe raza corespunzătoare punctului de tangență), deducem că $m(\widehat{ODC}) = 30°$. Drept urmare, $OD = 2OC = 2r$. Cum $BD = OD - OB$, conchidem că $BD = r$.

38. Fie $[AB]$ un diametru al cercului $\mathcal{C}(0, r)$, C un punct pe $(AB$ astfel încât $B \in (AC)$ și $BC = r$, iar M mijlocul lui $[AC]$. Perpendiculara în M pe AB taie cercul în punctele E și F. Arătați că dreptele CE și CF sunt tangente la cerc.

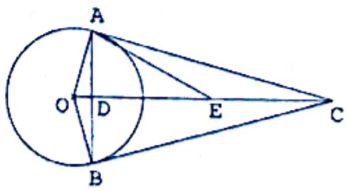
Soluție



Deoarece $OM = AM - AO$, $MB = CM - CB$, iar $AM = MC$ și $AO = CB$, rezultă că $[OM] \equiv [MB]$. Totodată, $[ME] \equiv [MF]$ (căci $OM \perp EF$) și $EF \perp OB$, deci patrulaterul $BEOF$ este romb, de unde $[EB] \equiv [OE]$. Drept urmare, $EB = \frac{OC}{2}$ (fiindcă $EB = r$ și $OC = 2r$). Remarcând și faptul că $[EB]$ este mediana corespunzătoare laturii OC (în triunghiul CEO), conchidem că $m(\widehat{CEO}) = 90°$, ceea ce arată că CE este tangentă la cercul considerat. Analog, arătăm că și CF este tangentă la cercul $\mathcal{C}(0, r)$.

39. Fie A, B două puncte ale cercului $\mathcal{C}(0, r)$ ($m(\widehat{AB}) \neq 180°$) și C punctul de intersecție al tangentelor în A și B la cerc. Arătați că, dacă $OC = 2AB$, atunci $m(\widehat{ACB}) = 30°$.

Soluție



Fie $\{D\} = AB \cap OC$ și E mijlocul lui $[OC]$. Deoarece $m(\widehat{OAC}) = 90°$ (căci AC este tangentă la cerc), rezultă că $AE = \frac{OC}{2}$, de unde $AE = AB$. Remarcând și faptul că $AD = \frac{AB}{2}$, deducem că $AD = \frac{AE}{2}$. Având în vedere că $m(\widehat{ADE}) = 90°$ (fiindcă $AD \perp OC$), rezultă că $m(\widehat{AED}) = 30°$. Totodată, $m(\widehat{AED}) = 2m(\widehat{ECA})$ (căci $[EC] \equiv [EA]$ implică $\widehat{ECA} \equiv \widehat{EAC}$), deci

Scanned with OKEN Scanner

$m(\widehat{ECA}) = 15°$, ceea ce este totuna cu $m(\widehat{DCA}) = 15°$. Ținând seama și de faptul că $\widehat{DCA} \equiv \widehat{DCB}$ (fiindcă $[CA] \equiv [CB]$ și $CD \perp AB$), conchidem că $m(\widehat{ACB}) = 30°$.

40. Arătați că măsura unui unghi cu vârful pe un cerc și având una dintre laturi tangentă la cerc, iar cealaltă secantă la cerc este jumătate din măsura arcului de cerc situat în interiorul unghiului.

Soluție

Fie O centrul cercului considerat, A un punct al cercului și semidreptele AB, AC astfel încât dreapta AB să fie secantă la cerc, iar dreapta AC, tangentă la cerc. Notăm cu M mijlocul lui $[AB]$. Atunci, $AM \perp OM$ (căci $[OA] \equiv [OB]$) și $AC \perp OA$, deci $\widehat{BAC} \equiv \widehat{AOM}$. Remarcând faptul că $m(\widehat{AOM}) = \frac{m(\widehat{AOB})}{2}$, iar $m(\widehat{AOB}) = m(\overset{\frown}{AB})$ ($\overset{\frown}{AB}$ arc mic), deducem că $m(\widehat{AOM}) = \frac{m(\overset{\frown}{AB})}{2}$. În consecință, $m(\widehat{BAC}) = \frac{m(\overset{\frown}{AB})}{2}$.

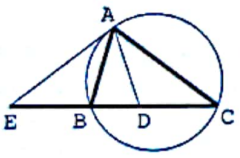
41. Fie triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) și D un punct pe tangenta în B la cercul circumscris triunghiului (A și D de aceeași parte a dreptei BC). Arătați că $[BA$ este bisectoarea unghiului DBC.

Soluție

Deoarece $m(\widehat{ABC}) = \frac{m(\overset{\frown}{AC})}{2}$, iar $\overset{\frown}{AC} \equiv \overset{\frown}{AB}$ (căci $[AB] \equiv [AC]$), rezultă că $m(\widehat{ABC}) = \frac{m(\overset{\frown}{AB})}{2}$ ($\overset{\frown}{AB}$ și $\overset{\frown}{AC}$ reprezintă arce mici ale cercului considerat). Remarcând și faptul că $m(\widehat{ABD}) = \frac{m(\overset{\frown}{AB})}{2}$ (fiindcă DB este tangentă la cerc), deducem că $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ABD}$, deci $[BA$ este bisectoarea unghiului DBC.

42. Fie triunghiul ABC, D piciorul bisectoarei unghiului BAC și E intersecția tangentei în A la cercul circumscris triunghiului ABC cu dreapta BC. Arătați că triunghiul ADE este isoscel.

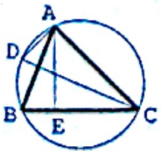
Soluție



Remarcăm faptul că $m(\widehat{EAD}) = m(\widehat{EAB}) + m(\widehat{BAD})$ (căci (AB este inclusă în interiorul unghiului EAD), iar $m(\widehat{EDA}) = m(\widehat{ACD}) + m(\widehat{CAD})$ (fiindcă $\widehat{EDA}$ este unghi exterior al triunghiului ADC). Întrucât $m(\widehat{EAB}) = \frac{m(\overset{\frown}{AB})}{2}$ (căci dreapta AE este tangentă la cercul circumscris triunghiului ABC) și $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{ACB}) = \frac{m(\overset{\frown}{AB})}{2}$ (fiindcă $\widehat{ACB}$ este unghi înscris în cerc), rezultă că $\widehat{EAB} \equiv \widehat{ACD}$. Totodată, $\widehat{BAD} \equiv \widehat{CAD}$ (căci $[AD$ este bisectoarea unghiului BAC). Prin urmare, $\widehat{EAD} \equiv \widehat{EDA}$, ceea ce arată că triunghiul ADE este isoscel.

43. Fie $\mathcal{C}$ cercul circumscris triunghiului ABC, D punctul diametral opus lui C și $AE \perp BC$ ($E \in BC$). Arătați că $AB \cdot AC = AE \cdot CD$.

Soluție



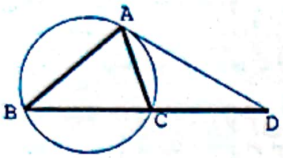
Deoarece $m(\widehat{AEB}) = 90°$, $m(\widehat{CAD}) = 90°$ (căci $[CD]$ este diametru al cercului $\mathcal{C}$) și $\widehat{ABE} \equiv \widehat{CDA}$ (fiindcă $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{ABC}) = \frac{m(\overset{\frown}{AC})}{2}$ și

Scanned with OKEN Scanner

$m(\widehat{CDA}) = \frac{m(\widehat{AC})}{2}$), rezultă că $\Delta ABE \sim \Delta CDA$, ceea ce implică $\frac{AB}{CD} = \frac{AE}{CA}$, de unde $AB \cdot AC = AE \cdot CD$.

44. **Tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC intersectează dreapta BC în D. Arătați că $DA^2 = DB \cdot DC$.**

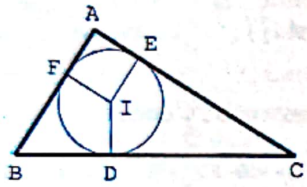
Soluție



Întrucât $m(\widehat{DAC}) = \frac{m(\widehat{AC})}{2}$ (căci dreapta DA este tangentă la cercul considerat) și $m(\widehat{DBA}) = m(\widehat{CBA}) = \frac{m(\widehat{AC})}{2}$, rezultă că $\widehat{DAC} \equiv \widehat{DBA}$. Totodată, $\widehat{ADC} \equiv \widehat{BDA}$, deci $\Delta ADC \sim \Delta BDA$, ceea ce implică $\frac{DA}{DB} = \frac{DC}{DA}$, de unde $DA^2 = DB \cdot DC$.

45. **Fie triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90°$), $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ și r raza cercului înscris în triunghi. Arătați că $2r = b + c - a$.**

Soluție



Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC, iar D, E și F punctele de tangență ale cercului, respectiv, cu BC, CA și AB. Deoarece patrulaterul $AEIF$ este pătrat (căci $m(\hat{A}) = m(\hat{E}) = m(\hat{F}) = 90°$ și $[IE] \equiv [IF]$, rezultă că $AE = AF = IE = r$. Remarcând faptul că $CE = CA - AE$ și $BF = BA - AF$, deducem că $CE = b - r$ și $BF = c - r$. Pe de altă parte, $CD + BD = BC$, iar $CD = CE$ și $BD = BF$ (tangente duse dintr-un punct exterior la un cerc), deci $b - r + c - r = a$, ceea ce conduce la $2r = b + c - a$.

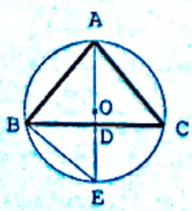
46. **Se consideră triunghiul dreptunghic isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) în care $AB = 4\sqrt{2}$ cm. Fie I centrul cercului înscris în triunghi. Aflați distanța AI.**

Soluție

Fie D mijlocul lui $[BC]$. Deoarece $[AB] \equiv [AC]$, rezultă că $[AD$ este bisectoarea unghiului BAC și $AD \perp BC$. Având în vedere că centrul cercului înscris într-un triunghi este punctul de concurență a bisectoarelor unghiurilor triunghiului, deducem că $I \in AD$, ceea ce implică $ID \perp BC$. Drept urmare, $r = ID$, de unde $ID = \frac{AB + AC - BC}{2}$. Cum $BC = 8$ cm (căci $BC^2 = AB^2 + AC^2$), rezultă că $ID = 4\sqrt{2} - 4$ cm. Remarcând și faptul că $AI = AD - ID$, iar $AD = \frac{BC}{2} = 4$ cm (fiindcă $m(\widehat{BAC}) = 90°$ și $[DB] \equiv [DC]$), conchidem că $AI = 8 - 4\sqrt{2}$ cm.

47. **Se consideră triunghiul isoscel ABC ($[AB] \equiv [AC]$) în care $AB = 20$ cm și $BC = 24$ cm. Aflați raza cercului circumscris triunghiului ABC.**

Soluție



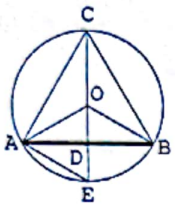
Fie O centrul și r raza cercului circumscris triunghiului ABC, D mijlocul lui $[BC]$ și E a doua intersecție a dreptei AD cu cercul. Deoarece $[AB] \equiv [AC]$ și $[DB] \equiv [DC]$, rezultă că $AD \perp BC$. Prin urmare, AD este mediatoarea laturii BC, ceea ce arată că $O \in AD$, iar $[AE]$ este diametru al cercului. Întrucât $BD = \frac{BC}{2} = 12$ cm și $AD^2 = AB^2 - BD^2$, re-

Scanned with OKEN Scanner

zultă că $AD = 16$ cm. Remarcând faptul că $m(\widehat{ABE}) = 90°$ (căci $[AE]$ este diametru al cercului circumscris triunghiului ABC) și $BD \perp AE$, deducem că $AB^2 = AE \cdot AD$, de unde $AE = 25$ cm. Având în vedere că $AE = 2r$, conchidem că $r = 12{,}5$ cm.

48. **Fie cercul de centru O, A și B două puncte distincte ale cercului, D mijlocul coardei AB și E mijlocul arcului mic AB. Aflați raza cercului și $m(\widehat{AEB})$, știind că $AB = 6\sqrt{3}$ cm și $DE = 3$ cm.**

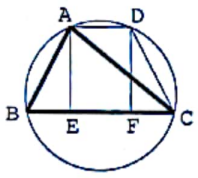
Soluție



Evident, $O \in DE$. Fie C intersecția dreptei DE cu arcul mare AB și r raza cercului. Cum $[CE]$ este diametru al cercului considerat, rezultă că $m(\widehat{CAE}) = 90°$. Remarcând și faptul că $AD \perp CE$, deducem că $AD^2 = DE \cdot DC$, de unde $DC = 9$ cm (căci $AD = \frac{AB}{2} = 3\sqrt{3}$ cm). Drept urmare, $CE = 12$ cm (fiindcă $CE = DE + DC$), ceea ce implică $r = 6$ cm. Totodată, $AE^2 = DE \cdot CE$, deci $AE = 6$ cm. Rezultă că $[OA] \equiv [OE] \equiv [AE]$, de unde $m(\widehat{AOE}) = 60°$. Ținând seama și de faptul că $m(\widehat{AOB}) = 2m(\widehat{AOE})$, iar $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AEB})$, conchidem că $m(\widehat{AEB}) = 120°$.

49. **Se consideră triunghiul ABC în care $AB = 5$ cm, $BC = 8$ cm și $CA = 7$ cm. Paralela prin A la latura BC intersectează, din nou, cercul circumscris triunghiului în D. Aflați distanța AD.**

Soluție



Fie $AE \perp BC$ și $DF \perp BC$ ($E, F \in BC$). Se arată cu ușurință că $E, F \in (BC)$. Deoarece $AE \parallel DF$, rezultă că $\widehat{AB} \equiv \widehat{DC}$, de unde $[AB] \equiv [DC]$. Remarcând și faptul că $[AE] \equiv [DF]$ (căci patrulaterul $ADFE$ este dreptunghi), deducem că $\Delta ABE \equiv \Delta DCF$ (I.C.), ceea ce implică $[BE] \equiv [CF]$. Pe de altă parte, $AE^2 = AB^2 - BE^2 = 25 - BE^2$ și, totodată, $AE^2 = AC^2 - CE^2 = 49 - CE^2$, de unde $25 - BE^2 = 49 - CE^2$, ceea ce conduce la $CE^2 - BE^2 = 24$. Având în vedere că $CE^2 - BE^2 = (CE + BE)(CE - BE) = AB(CE - CF) = 8EF = 8AD$, deducem că $8AD = 24$, deci $AD = 3$ cm.

50. **Se consideră triunghiul dreptunghic ABC ($m(\hat{A}) = 90°$) în care $\frac{AB}{BC} = \frac{5}{13}$. Fie R raza cercului circumscris triunghiului și r raza cercului înscris în triunghi. Aflați P_{ABC}, știind că $R - r = 9$ cm.**

Soluție

Deoarece $\frac{AB}{BC} = \frac{5}{13}$, există $k > 0$ astfel încât $AB = 5k$ și $BC = 13k$. Ținând seama și de faptul că $CA^2 = BC^2 - AB^2$, deducem că $CA = 12k$. Având în vedere că $R = \frac{BC}{2}$, iar $2r = AB + AC - BC$, rezultă că $R = 6{,}5k$, iar $r = 2k$, ceea ce implică $R - r = 4{,}5k$. Totodată, $R - r = 9$ cm, deci $k = 2$. Drept urmare, $AB = 10$ cm, $BC = 26$ cm și $CA = 24$ cm, de unde $P_{ABC} = 60$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

PROBLEME PROPUSE

1. Se consideră cercul $\mathcal{C}$ de centru O și rază $r = 6$ cm. Fie punctele A, B, C, D și E astfel încât $OA = 5,(6)$ cm, $OB = 4\sqrt{2}$ cm, $OC = 6$ cm, $OD = 4\sqrt{3}$ cm, $OE = 3\sqrt{6}$ cm. Precizați poziția fiecăruia dintre aceste puncte față de cercul $\mathcal{C}$.

2. Fie cercul $\mathcal{C}$ de centru O și rază $r = 5$ cm, iar $[AB]$ o coardă a cercului. Aflați $d(O, AB)$, știind că $AB = 8$ cm.

3. Fie cercul $\mathcal{C}$ de centru O și rază $r = 4\sqrt{3}$ cm, iar $[AB]$, $[BC]$ două coarde ale cercului. Aflați lungimea fiecăreia dintre coarde, știind că $d(O, AB) = 4\sqrt{2}$ cm și $d(O, BC) = 2\sqrt{3}$ cm.

4. Fie cercul $\mathcal{C}$ de centru O și rază r, iar $[AB]$ o coardă a cercului. Aflați r, știind că $AB = 12$ cm și $d(0, AB) = 8$ cm.

5. Se consideră două cercuri concentrice. O dreaptă intersectează cele două cercuri în A și B, respectiv A' și B'. Arătați că $[AA'] \equiv [BB']$.

6. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului neisoscel ABC, D mijlocul arcului mic BC și $AE \perp BC$ $(E \in BC)$. Arătați că $OD \parallel AE$.

7. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, $D = \underset{BC}{pr}O$, $E = \underset{CA}{pr}O$ și $F = \underset{AB}{pr}O$. Arătați că $\mathcal{A}[DEF] = \frac{1}{4}\mathcal{A}[ABC]$.

8. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, $D = \underset{BC}{pr}O$, $E = \underset{CA}{pr}O$ și $F = \underset{AB}{pr}O$. Arătați că $\mathcal{A}[OBD] + \mathcal{A}[OCE] + \mathcal{A}[OAF] = \frac{1}{2}\mathcal{A}[ABC]$.

9. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului isoscel ABC $([AB] \equiv [AC])$. Perpendiculara din O pe AB intersectează arcul mic AB în E, iar perpendiculara din O pe AC intersectează arcul mic AC în F. Arătați că $EF \parallel BC$ și că $[EF] \equiv [AB]$.

10. Fie $[AB]$ și $[CD]$ două coarde congruente ale unui cerc astfel încât $[AB] \cap [CD] = \varnothing$. Arătați că $AC \parallel BD$ sau $[AC] \equiv [BD]$.

11. Fie $\mathcal{C}$ cercul circumscris triunghiului ascuțitunghic și neisoscel ABC, iar D a doua intersecție a perpendicularei din A pe BC cu cercul $\mathcal{C}$. Paralelele prin D la AB și AC intersectează, din nou, cercul $\mathcal{C}$ în E, respectiv F. Arătați că $BF \parallel CE$.

12. Fie $\mathcal{C}$ cercul circumscris triunghiului dreptunghic neisoscel ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$, iar D a doua intersecție a perpendicularei din A pe BC cu cercul $\mathcal{C}$. Paralelele prin D la AB și AC intersectează, din nou, cercul $\mathcal{C}$ în E, respectiv F. Arătați că patrulaterul $BECF$ este dreptunghi.

13. Un patrulater convex și ortodiagonal $ABCD$ este înscris în cercul $\mathcal{C}$ de centru O și rază $r = 25$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

Aflați P_{ABCD}, știind că $d(O,\ AC) = 7$ cm și $d(O,\ BD) = 15$ cm.

14. Un patrulater convex și ortodiagonal $ABCD$ este înscris în cercul $\mathcal{C}$ de centru O și rază $r = 5$ cm. Fie $\{E\} = AC \cap BD$. Aflați P_{ABCD}, știind că $[AC] \equiv [BD]$ și că $OE = 3\sqrt{2}$ cm.

15. Fie cercul $\mathcal{C}$ de centru O și rază $r = 4$ cm, A și B două puncte distincte ale cercului, E mijlocul lui $[OA]$ și F mijlocul lui $[OB]$. Aflați distanța EF, știind că $m(\widehat{AB}) = 90°$.

16. Fie cercul $\mathcal{C}(0,\ r)$, A și B două puncte distincte ale cercului, E mijlocul lui $[OA]$ și F mijlocul lui $[OB]$. Aflați r, știind că $m(\widehat{AB}) = 60°$ și că $EF = 3$ cm.

17. Fie $A,\ B,\ C,\ D$ patru puncte distincte ale cercului $\mathcal{C}(0,\ r)$, $OE \perp AB$ și $OF \perp CD$ ($E \in AB,\ F \in CD$). Arătați că, dacă $m(\widehat{AB}) + m(\widehat{CD}) = 180°$, atunci $\triangle AOE \equiv \triangle OCF$.

18. Se consideră cercul $\mathcal{C}$ de centru O și rază $r = 4\sqrt{3}$ cm. Fie A și B două puncte ale cercului astfel încât $m(\widehat{AB}) = 120°$. Perpendiculara din O pe AB intersectează arcul mic AB în C. Aflați $\mathcal{A}[ABC]$.

19. Se consideră cercul $\mathcal{C}$ de centru O și rază $r = 4$ cm. Fie $A,\ B,\ C$ trei puncte distincte ale cercului astfel încât $m(\widehat{AB}) = 60°$ și $m(\widehat{BC}) = 90°$ (B pe arcul mic AC). Aflați aria patrulaterului $OABC$.

20. Fie $A,\ B,\ C$ trei puncte distincte ale cercului $\mathcal{C}(0,\ r)$ și $D = \underset{BC}{pr}O$. Aflați r și $m(\widehat{BC})$, știind că $m(\widehat{AB}) = 120°$, $AB = 6\sqrt{3}$ cm și $OD = 3\sqrt{3}$ cm.

21. Se consideră cercul de centru O și rază $r = 4\sqrt{3}$ cm. Fie A și B două puncte distincte ale cercului, M mijlocul arcului mic AB și C intersecția dreptei OM cu arcul mare AB. Aflați perimetrul triunghiului ABC, știind că $m(\widehat{AB}) = 120°$.

22. Se consideră cercul de centru O și rază $r = 4\sqrt{2}$ cm. Fie A și B două puncte distincte ale cercului astfel încât $m(\widehat{AOB}) = 90°$. Perpendiculara din O pe AB intersectează arcul mare AB în C. Aflați P_{ABC}.

23. Fie $[AB]$ și $[CD]$ două coarde paralele ale unui cerc și E un punct al cercului, dar nesituat în porțiunea de plan mărginită de dreptele suport ale celor două coarde. Arătați că bisectoarea unghiului AEB este și bisectoarea unghiului CED.

24. Fie $[AB]$ un diametru al cercului $\mathcal{C}(0,\ r)$ și M un punct oarecare al cercului ($M \neq A$ și $M \neq B$). Bisectoarea unghiului MAB intersectează, din nou, cercul în E, iar bisectoarea unghiului MBA intersectează, din nou, cercul în F. Arătați că $m(\widehat{EF}) = 90°$.

25. Fie $[AB]$ o coardă a cercului $\mathcal{C}(0,\ r)$ ($O \notin AB$) și M un punct oarecare al cercului ($M \neq A,\ M \neq B$). Precizați unde trebuie luat punctul M astfel încât unghiul AMB să fie:
a) ascuțit; b) obtuz.

Scanned with OKEN Scanner

26. Fie A, B, C trei puncte distincte ale cercului $\mathcal{C}$, D punctul în care bisectoarea unghiului ACB intersectează, din nou, cercul şi M un punct oarecare pe cerc. Arătaţi că $[MD$ este bisectoarea unghiului AMB.

27. Fie $[AB]$ o coardă a cercului $\mathcal{C}(0, r)$ şi C, D, E trei puncte ale cercului situate de aceeaşi parte a dreptei AB. Arătaţi că bisectoarele unghiurilor ACB, ADB şi AEB sunt concurente.

28. Fie A, B, C trei puncte distincte situate pe cercul de centru O. Arătaţi că, dacă $\widehat{AOC} \equiv \widehat{BOC}$, atunci $OC \perp AB$.

29. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$. Fie $AD \perp BC$ $(D \in BC)$. Cercul de centru D şi rază AD intersectează dreptele AB şi AC (din nou) în E, respectiv F. Arătaţi că punctele E, D şi F sunt coliniare.

30. Fie $\mathcal{C}$ cercul circumscris triunghiului ascuţitunghic ABC, H ortocentrul triunghiului şi D punctul în care $(AH$ intersectează cercul $\mathcal{C}$. Arătaţi că D este simetricul lui H faţă de dreapta BC.

31. Fie $\mathcal{C}$ cercul circumscris triunghiului ABC şi D, E, F punctele diametral opuse vârfurilor A, B, respectiv C. Arătaţi că $\triangle DEF \equiv \triangle ABC$.

32. Fie $[AB]$ un diametru al cercului $\mathcal{C}$. Se duc coardele congruente AC, AD şi, apoi, coardele congruente BE, BF (C, E sunt situate de aceeaşi parte a dreptei AB). Fie $\{G\} = AC \cap BE$ şi $\{H\} = AD \cap BF$. Arătaţi că $GH \perp AB$.

33. Fie $\mathcal{C}$ cercul circumscris triunghiului dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$, D mijlocul arcului mic AB, I un punct pe (CD) şi E punctul în care $(AI$ intersectează $\mathcal{C}$. Arătaţi că, dacă $\widehat{CAE} \equiv \widehat{DIB}$, atunci $[EI] \equiv [EB]$.

34. Se consideră triunghiul isoscel ABC $([AB] \equiv [AC])$ şi cercul $\mathcal{C}$ circumscris triunghiului. Fie D punctul diametral opus lui A, $CE \perp AB$ $(E \in AB)$, $\{F\} = (CE \cap \mathcal{C}$ şi $\{H\} = AD \cap CE$. Arătaţi că:
a) $[AF] \equiv [AH]$; b) patrulaterul $BDCH$ este romb.

35. Fie cercul $\mathcal{C}(0, r)$, A şi B două puncte ale cercului, iar C piciorul perpendicularei din B pe tangenta în A la cerc. Arătaţi că $[BA$ este bisectoarea unghiului OBC.

36. Fie $[AB]$ un diametru al cercului $\mathcal{C}(0, r)$, C un punct pe cerc astfel încât $m(\widehat{BC}) = 60°$ şi D punctul în care tangenta în C la cerc intersectează dreapta AB. Arătaţi că $DB = r$.

37. Fie cercul $\mathcal{C}(0, r)$ şi A, B două puncte ale cercului astfel încât $m(\widehat{AB}) = 135°$. Tangenta în B la cerc intersectează dreapta AO în C. Arătaţi că $BC = r$.

38. Fie cercul de centru O, A şi B două puncte ale cercului, M mijlocul unuia dintre arcele AB şi C un punct pe tangenta în M la cerc. Arătaţi că $MC \parallel AB$.

39. Fie A, B două puncte diametral opuse în cercul $\mathcal{C}(0, r)$, iar M un punct pe unul dintre arcele AB astfel încât $m(\widehat{MA}) \neq m(\widehat{MB})$. Tangenta în M la cerc intersectează dreapta AB în C. Arătaţi că $\widehat{AMO} \equiv \widehat{CMB}$.

Scanned with OKEN Scanner

40. Fie $\mathcal{C}$ cercul circumscris triunghiului isoscel ABC, iar E şi F două puncte situate pe tangenta în A la cerc astfel încât $A \in (EF)$. Arătaţi că $\widehat{EAB} \equiv \widehat{FAC}$.

41. Se consideră cercul $\mathcal{C}$ de centru O şi rază $r = 6$ cm. Fie A şi B două puncte distincte ale cercului astfel încât $m(\widehat{AB}) = 120°$, iar C punctul de intersecţie a tangentelor în A şi B la cerc. Aflaţi $d(C, AB)$.

42. Fie cercul $\mathcal{C}$ de centru O şi rază $r = 5$ cm, $[AB]$ un diametru al cercului, iar M un punct pe (AB) astfel încât $AM = 8$ cm. Perpendiculara în M pe AB intersectează $\mathcal{C}$ în C şi D, iar tangenta în B la cerc intersectează AC în E şi AD în F. Arătaţi că $[EF] \equiv [AB]$.

43. Fie $[AB]$ şi $[CD]$ două coarde concurente ale unui cerc. Arătaţi că $AB \perp CD$ dacă şi numai dacă $m(\widehat{AD}) + m(\widehat{BC}) = 180°$.

44. Fie H ortocentrul triunghiului ascuţitunghic ABC, $\mathcal{C}$ cercul circumscris triunghiului, $\{D\} = (AH \cap \mathcal{C}$, $\{E\} = (BH \cap \mathcal{C}$ şi $\{F\} = (CH \cap \mathcal{C}$. Arătaţi că punctul H este centrul cercului înscris în triunghiul DEF.

45. Fie cercul $\mathcal{C}$ şi I un punct situat în interiorul cercului. Arătaţi că există un triunghi înscris în cerc pentru care I să fie centrul cercului înscris în triunghi.

46. Fie cercul $\mathcal{C}$ şi două diametre ale cercului astfel încât unul dintre unghiurile formate de ele să aibă măsura de $60°$. Construiţi o coardă în cerc cu proprietatea că diametrele considerate determină pe această coardă trei segmente congruente.

47. Fie H ortocentrul triunghiului ascuţitunghic ABC, O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, D simetricul lui A faţă de O, $\{E\} = BH \cap AD$ şi $\{F\} = CH \cap AD$. Arătaţi că $\triangle HEF \sim \triangle ABC$.

48. Într-un triunghi isoscel, lungimea uneia dintre laturile congruente este de 10 cm, iar raza cercului circumscris triunghiului este de $6{,}25$ cm. Aflaţi perimetrul triunghiului.

49. Fie A, B, C trei puncte distincte ale cercului $\mathcal{C}(0, r)$ astfel încât $m(\widehat{AC}) + m(\widehat{CB}) = 180°$. Tangenta în A la cerc intersectează BC în E, iar tangenta în B la cerc intersectează AC în F. Arătaţi că $AE \cdot BF = 4r^2$.

50. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC $(m(\hat{A}) = 90°)$ în care $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$. Fie R raza cercului circumscris triunghiului şi r raza cercului înscris în triunghi. Aflaţi $\mathcal{A}[ABC]$, ştiind că $R - r = 3$ cm.

RĂSPUNSURI

2. 3 cm **3.** 8 cm, 12 cm **4.** 10 cm **14.** $18\sqrt{2}$ cm **15.** $2\sqrt{2}$ cm **16.** 6 cm **18.** $12\sqrt{2}$ cm^2 **19.** $8 + 4\sqrt{3}$ cm^2 **20.** $r = 6$ cm, $m(\widehat{BC}) = 60°$ **21.** 36 cm **22.** $8 + 8\sqrt{10}$ cm **25.** Dacă M este situat pe arcul mare AB, atunci $m(\widehat{AMB}) < 90°$, iar dacă M este situat pe arcul mic AB, atunci $m(\widehat{AMB}) > 90°$ **41.** 9 cm **48.** 32 cm **50.** 24 cm^2.

Scanned with OKEN Scanner

§ 2. POLIGOANE REGULATE

PROBLEME REZOLVATE

1. **Aflați măsura fiecăruia dintre unghiurile unui hexagon regulat.**

Soluție

Deoarece suma măsurilor unghiurilor unui hexagon regulat este $(6-2)\cdot 180^\circ = 720^\circ$, iar toate unghiurile hexagonului regulat sunt congruente, rezultă că măsura unuia dintre aceste unghiuri este $720^\circ : 6 = 120^\circ$.

2. **Măsura unuia dintre unghiurile unui polgon regulat convex este de 135°. Aflați numărul laturilor acestui poligon.**

Soluție

Fie n numărul laturilor poligonului considerat și S suma măsurilor unghiurilor sale. Cum toate unghiurile poligonului sunt congruente, rezultă că $S = 135^\circ n$. Totodată, $S = (n-2)\cdot 180^\circ$, deci $(n-2)\cdot 180^\circ = 135^\circ n$, de unde $n = 8$.

3. **Fie A, B, C și D patru puncte ale unui cerc astfel încât arcele AB, BC, CD să nu aibă puncte interioare comune. Arătați că, dacă $AB = l_3$, $BC = l_4$ și $CD = l_6$, atunci $AB \parallel CD$.**

Soluție

Întrucât $AB = l_3$, $BC = l_4$, $CD = l_6$, rezultă că $m(\widehat{AB}) = 120^\circ$, $m(\widehat{BC}) = 90^\circ$ și $m(\widehat{CD}) = 60^\circ$. Remarcând și faptul că $m(\widehat{AD}) = 360^\circ - [m(\widehat{AB}) + m(\widehat{BC}) + m(\widehat{CD})] = 90^\circ$, deducem că $\widehat{BC} \equiv \widehat{AD}$, de unde $AB \parallel CD$ ($\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ și $\widehat{AD}$ reprezintă arce mici).

4. **Fie $[AB]$ un diametru al cercului $\mathcal{C}(0, r)$ și C, D, E trei puncte ale unuia dintre semicercurile limitate de dreapta AB. Arătați că, dacă $AC = l_6$, $AO = l_4$ și $AE = l_3$, atunci $OC \perp AE$, $OD \perp AB$ și $OE \perp BC$.**

Soluție

Deoarece $m(\widehat{AC}) = 60^\circ$ și $m(\widehat{CE}) = m(\widehat{AE}) - m(\widehat{AC}) = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$, rezultă că $\widehat{AC} \equiv \widehat{CE}$, ceea ce arată că $OC \perp AE$. Analog, arătăm că $OE \perp BC$. Remarcând faptul că $m(\widehat{AOD}) = m(\widehat{AD})$, iar $m(\widehat{AD}) = 90^\circ$ (căci $AD = l_4$), deducem că $m(\widehat{AOD}) = 90^\circ$, de unde $OD \perp AB$.

5. **Fie $[AB]$ un diametru al cercului $\mathcal{C}(0, r)$ și C un punct situat în interiorul cercului astfel încât $m(\widehat{CAB}) = 15^\circ$ și $m(\widehat{CBA}) = 30^\circ$. Se notează cu E și F punctele în care dreapta AC, respectiv dreapta BC intersectează, din nou, cercul $\mathcal{C}$. Arătați că $EF = l_4$.**

Soluție

Întrucât $m(\widehat{CAB}) = \frac{m(\widehat{EB})}{2}$, iar $m(\widehat{CAB}) = 15^\circ$, rezultă că $m(\widehat{EB}) = 30^\circ$. Analog, arătăm că $m(\widehat{AF}) = 60^\circ$. Remarcând și faptul că $m(\widehat{EF}) = 180^\circ - [m(\widehat{AF}) + m(\widehat{EB})]$, deducem că $m(\widehat{EF}) = 90^\circ$, ceea ce arată că $EF = l_4$.

6. **Fie S_1, S_2, S_3, respectiv, aria triunghiului echilateral, aria pătratului, aria hexagonului regulat înscrise în cecul $\mathcal{C}(0, r)$. Arătați că $S_1 \cdot S_2 = r^2 S_3$.**

Scanned with OKEN Scanner

Soluție

Deoarece $S_1 = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$ (căci $S_1 = \frac{l_3^2\sqrt{3}}{4}$ și $l_3 = r\sqrt{3}$), iar $S_2 = 2r^2$ (fiindcă $S_2 = l_4^2$ și $l_4 = r\sqrt{2}$), rezultă că $S_1 S_2 = \frac{3r^4\sqrt{3}}{2}$. Remarcând faptul că $S_3 = \frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$ (pentru că $S_3 = \frac{3l_6^2\sqrt{3}}{2}$, iar $l_6 = r$), deducem că $r^2 S_3 = \frac{3r^4\sqrt{3}}{2}$. Astfel, cerința enunțului a fost îndeplinită.

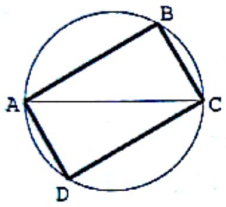
7. Aria unui hexagon regulat este $54\sqrt{3}$ cm^2. Aflați perimetrul pătratului înscris în cercul circumscris hexagonului.

Soluție

Fie r raza cercului circumscris hexagonului și S aria hexagonului. Atunci, $S = \frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$. Cum $S = 54\sqrt{3}$ cm^2, rezultă că $\frac{3r^2\sqrt{3}}{2} = 54\sqrt{3}$, ceea ce conduce la $r^2 = 36$, de unde $r = 6$ cm. Remarcând faptul că lungimea laturei pătratului înscris în cercul de rază r este $r\sqrt{2}$, deducem că perimetrul pătratului este $24\sqrt{2}$ cm.

8. Fie cercul $\mathcal{C}$ având raza $r = 3\sqrt{3}$. Aflați perimetrul și aria dreptunghiului înscris în $\mathcal{C}$ având una din laturi congruentă cu latura triunghiului echilateral înscris în $\mathcal{C}$.

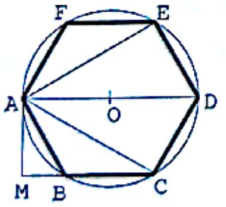
Soluție



Fie $ABCD$ dreptunghiul menționat în enunț. Pentru fixare, să presupunem că $AB = l_3$. Deoarece $m(\widehat{ABC}) = 90°$, rezultă că $m(\widehat{ADC}) = 180°$, deci $[AC]$ este diametru al cercului $\mathcal{C}$. Având în vedere că $m(\widehat{BC}) = 180° - m(\widehat{AB})$, iar $m(\widehat{AB}) = 120°$, deducem că $m(\widehat{BC}) = 60°$, ceea ce arată că $BC = l_6$. Drept urmare, $AB = r\sqrt{3} = 9$ cm și $BC = r = 3\sqrt{3}$ cm. Rezultă că $P_{ABCD} = 18 + 6\sqrt{3}$ cm, iar $\mathcal{A}[ABCD] = 27\sqrt{3}$ cm^2.

9. Se consideră hexagonul regulat $ABCDEF$ având aria egală cu $72\sqrt{3}$ cm^2. Aflați ariile triunghiurilor ABC, ACD, ADE și AEF.

Soluție



Fie r raza cercului circumscris hexagonului considerat și S aria hexagonului. Deoarece $S = \frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$, rezultă că $\frac{3r^2\sqrt{3}}{2} = 72\sqrt{3}$, de unde $r = 4\sqrt{3}$ cm și, deci, $l_6 = 4\sqrt{3}$ cm. Fie $AM \perp BC$. Remarcând că $m(\widehat{ABC}) > 90°$, deducem că $B \in (MC)$. Cum $m(\widehat{ABM}) = 180° - m(\widehat{ABC})$, iar $m(\widehat{ABC}) = 120°$, rezultă că $m(\widehat{ABM}) = 60°$. Prin urmare, $m(\widehat{MAB}) = 30°$, ceea ce implică $MB = \frac{AB}{2} = 2\sqrt{3}$ cm. Având în vedere că $AM^2 = AB^2 - MB^2$, deducem că $AM = 6$ cm. Întrucât $\mathcal{A}[ABC] = \frac{BC \cdot AM}{2}$, rezultă că $\mathcal{A}[ABC] = 12\sqrt{3}$ cm^2. Ținând seama și de faptul că $\mathcal{A}[ACD] = \mathcal{A}[ABCD] - \mathcal{A}[ABC]$, iar $\mathcal{A}[ABCD] = \frac{(AD + BC) \cdot AM}{2} = 36\sqrt{3}$ cm^2, deducem că $\mathcal{A}[ACD] = 24\sqrt{3}$ cm^2. Deoarece $\Delta ADE \equiv \Delta ACD$ și $\Delta AEF \equiv \Delta ABC$, rezultă că $\mathcal{A}[ADE] = 24\sqrt{3}$ cm^2 și $\mathcal{A}[AEF] = 12\sqrt{3}$ cm^2.

Scanned with OKEN Scanner

10. **Alegeți pe fiecare din laturile unui triunghi echilateral câte două puncte astfel încât cele șase puncte care se obțin să reprezinte vârfurile unui hexagon regulat.**

Soluție

Fie ABC triunghiul echilateral considerat și punctele $K, L \in (AB)$, $M, N \in (BC)$, $P, Q \in (CA)$ astfel încât $[AK] \equiv [KL] \equiv [LB]$, $[BM] \equiv [MN] \equiv [NC]$ și $[CP] \equiv [PQ] \equiv [QA]$. Deducem imediat că $KL = \frac{AB}{3}$, $MN = \frac{BC}{3}$, $PQ = \frac{CA}{3}$. Întrucât triunghiul AKQ este echilateral, rezultă că $KQ = AK = \frac{AB}{3}$. Analog, arătăm că $LM = BM = \frac{BC}{3}$ și $NP = CP = \frac{CA}{3}$. În consecință :

$$[KL] \equiv [LM] \equiv [MN] \equiv [NP] \equiv [PQ] \equiv [QK] \quad (1)$$

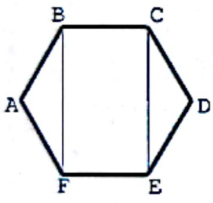
Având în vedere că $m(\widehat{QKL}) = 180° - m(\widehat{AKQ})$, iar $m(\widehat{AKQ}) = 60°$, deducem că $m(\widehat{QKL}) = 120°$. Analog, arătăm că $m(\widehat{KLM}) = 120°$, $m(\widehat{LMN}) = 120°$, $m(\widehat{MNP}) = 120°$, $m(\widehat{NPQ}) = 120°$ și $m(\widehat{PQK}) = 120°$, deci

$$\widehat{QKL} \equiv \widehat{KLM} \equiv \widehat{LMN} \equiv \widehat{MNP} \equiv \widehat{NPQ} \equiv \widehat{PQK} \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că poligonul $KLMNPQ$ este hexagon regulat. Drept urmare, punctele K, L, M, N, P și Q sunt cele ce îndeplinesc condiția din enunțul problemei.

11. **Fie $ABCDEF$ un hexagon având toate laturile congruente. Arătați că, dacă $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{D}) = 120°$, atunci hexagonul considerat este regulat.**

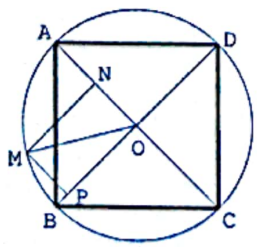
Soluție



Deoarece $\triangle ABF \equiv \triangle DCE$ (L.U.L.), rezultă că $[BF] \equiv [CE]$, ceea ce, împreună cu $[BC] \equiv [FE]$, arată că patrulaterul $BCEF$ este paralelogram. Remarcând faptul că $m(\widehat{FBC}) = m(\widehat{ABC}) - m(\widehat{ABF})$, iar $m(\widehat{ABC}) = 120°$ și $m(\widehat{ABF}) = 30°$, deducem că $m(\widehat{FBC}) = 90°$. Deci, patrulaterul $BCEF$ este dreptunghi, de unde $m(\widehat{BFE}) = m(\widehat{FEC}) = m(\widehat{ECB}) = 90°$. Cum $m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{ECB}) + m(\widehat{ECD})$, iar $m(\widehat{ECD}) = 30°$, rezultă că $m(\widehat{BCD}) = 120°$. Analog, $m(\widehat{DEF}) = m(\widehat{EFA}) = 120°$. Ținând seama atât de enunț, cât și de cele stabilite anterior, conchidem că hexagonul considerat este regulat.

12. **Fie $\mathcal{C}(O, r)$ cercul circumscris pătratului $ABCD$, M un punct pe arcul mic AB, $MN \perp AC$ și $MP \perp BD$ ($N \in AC$, $P \in BD$). Aflați $\mathcal{A}[MNOP]$, știind că $m(\widehat{AM}) = 60°$ și $AB = 6\sqrt{2}$ cm.**

Soluție

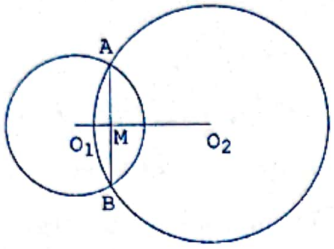


Întrucât $AB = l_4$, iar $l_4 = r\sqrt{2}$, rezultă că $r\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$, de unde $r = 6$ cm. Remarcând faptul că $m(\widehat{AOM}) = m(\widehat{AM}) = 60°$, iar $[OM] \equiv [OA]$, deducem că triunghiul OAM este echilateral. Totodată, $MN \perp OA$, deci $MN = \frac{AO\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ cm, iar $ON = \frac{AO}{2} = 3$ cm. Având în vedere că $m(\widehat{MNO}) = 90°$, $m(\widehat{MPO}) = 90°$ și $m(\widehat{NOP}) = 90°$ (căci diagonalele unui pătrat sunt perpendiculare), conchidem că patrulaterul $MNOP$ este dreptunghi, deci $\mathcal{A}[MNOP] = MN \cdot NO = 9\sqrt{3}$ cm^2.

Scanned with OKEN Scanner

13. **Fie cercurile secante $\mathcal{C}_1(O_1, r_1)$, $\mathcal{C}_2(O_2, r_2)$, iar $[AB]$ coarda comună a lor. Aflați distanța O_1O_2, știind că $AB = 4\sqrt{3}$ cm și că $[AB]$ reprezintă latura triunghiului echilateral înscris în $\mathcal{C}_1$ și, totodată, latura hexagonului regulat înscris în $\mathcal{C}_2$.**

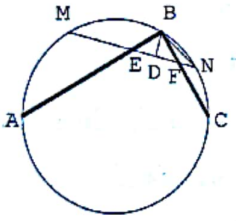
Soluție



Fie M mijlocul lui $[AB]$. Deoarece $[AB]$ este latură a triunghiului echilateral înscris în cercul $\mathcal{C}_1$, rezultă că $AB = r_1\sqrt{3}$, ceea ce conduce la $r_1\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$, de unde $r_1 = 4$ cm. Remarcând faptul că $[AB]$ este latură a hexagonului regulat înscris în cercul $\mathcal{C}_2$, deducem că $AB = r_2$, de unde $r_2 = 4\sqrt{3}$ cm. Se arată cu ușurință că $[O_1M]$ este apotema triunghiului echilateral înscris în $\mathcal{C}_1$, iar O_2M este apotema hexagonului regulat înscris în $\mathcal{C}_2$. Drept urmare, $O_1M = \frac{r_1}{2} = 2$ cm, iar $O_2M = \frac{r_2\sqrt{3}}{2} = 6$ cm. Având în vedere că punctele O_1, M și O_2 sunt coliniare (căci $O_1M \perp AB$ și $O_2M \perp AB$), rezultă că $O_1O_2 = O_1M + O_2M$ și, deci, $O_1O_2 = 8$ cm.

14. **Se consideră cercul $\mathcal{C}$ și punctele A, B, C situate pe cerc astfel încât arcele AB, BC să nu aibă puncte interioare comune, iar $AB = l_3$ și $BC = l_6$. Fie M mijlocul lui $\overset{\frown}{AB}$, N mijlocul lui $\overset{\frown}{BC}$, $\{E\} = AB \cap MN$ și $\{F\} = BC \cap MN$. Arătați că $[EF] \equiv [BN]$.**

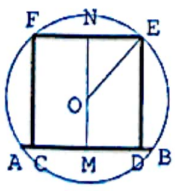
Soluție



Deoarece $AB = l_3$, rezultă că $m(\overset{\frown}{AB}) = 120°$, deci $m(\overset{\frown}{AM}) = m(\overset{\frown}{BM}) = 60°$. Întrucât $BC = l_6$, rezultă că $m(\overset{\frown}{BC}) = 60°$, de unde $m(\overset{\frown}{BN}) = m(\overset{\frown}{CN}) = 30°$. Remarcând faptul că $m(\overset{\frown}{BEF}) = \frac{m(\overset{\frown}{AM}) + m(\overset{\frown}{BN})}{2}$, deducem că $m(\overset{\frown}{BEF}) = 45°$. Analog, $m(\overset{\frown}{BFE}) = 45°$ și, deci, $m(\overset{\frown}{EBF}) = 90°$. Fie $BD \perp EF$. Ținând seama de cele stabilite anterior, conchidem că $BD = \frac{EF}{2}$. Cum $m(\overset{\frown}{BND}) = \frac{m(\overset{\frown}{BM})}{2} = 30°$, iar $m(\overset{\frown}{BDN}) = 90°$, rezultă că $BD = \frac{BN}{2}$. Drept urmare, $[EF] \equiv [BN]$.

15. **Fie $[AB]$ o coardă a cercului de centru O și rază $r = 5$ cm. Aflați perimetrul pătratului înscris în segmentul de cerc limitat de $[AB]$ și arcul mare AB, știind că $AB = l_3$.**

Soluție



Fie $CDEF$ pătratul menționat în enunțul problemei (C, $D \in (AB)$), M mijlocul lui $[CD]$, N mijlocul lui $[EF]$ și $x = CD$. Deoarece M este și mijlocul lui $[AB]$, iar $AB = l_3$, rezultă că $OM = a_3 = \frac{r}{2} = \frac{5}{2}$ cm. Remarcând faptul că $MN = CD = x$, iar $ON = MN - OM$, deducem că $ON = x - \frac{5}{2}$. Întrucât $ON^2 + NE^2 = OE^2$ (căci $ON \perp NE$), rezultă că $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 25$, ceea ce conduce

Scanned with OKEN Scanner

la $x^2-4x-15=0$. Având în vedere că $x^2-4x-15=x^2-4x+4-19=(x-2)^2-19$, egalitatea anterioară este echivalentă cu $(x-2)^2=19$, de unde $x=2+\sqrt{19}$ (căci $x>0$). În consecință, $P_{CDEF}=8+4\sqrt{19}$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. Basarab C., Ivăşchescu N., Nanu I., Niculescu L., Pătraşcu I., Tălău N., *Probleme de matematică pentru clasele V-VIII*, Editura Cardinal, Craiova, 1994;
2. Basarab C., Basarab M., Cotoi E., Drăcea D., Niculescu L.,Pătraşcu I., Ştirbeţi C., Tălău N., Tuţescu L., *Probleme de matematică pentru gimnaziu*, Editura Cardinal, Craiova, 2001.
3. Basarab C., Pătraşcu I., Tălău N., *101 teste de matematică*, Editura Cradinal, 1993.
4. Cohal T., *Vă place matematica?*, ediţia a II-a, Editura Moldova, Iaşi, 1996.
5. Cohal T., Cohal E., *Geometrie*, Editura Polirom, Iaşi, 1996.
6. Constantinescu D., *Matematica în concursurile şcolare* (1994), Editura Paralela 45, Piteşti, 1995.
7. Constantinescu D., Drugan Gh., Ene A., Ghica I., Iacob Gh., Teodorini G., *Exerciţii şi probleme pentru examene şi concursuri şcolare, vol. II*, Editura Rotari's, Râmnicu Vâlcea, 1992.
8. Cuculescu I., Gaiu L., Ottescu C., *Matematică – geometrie, Manual pentru clasa a VII-a,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1991.
9. Hollinger A., *Probleme de geometrie pentru clasele V – VIII,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.
10. Moise E., Downs F., *Geometrie,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.
11. Radu D., Radu E., *Matematică, manual pentru clasa a VII-a,* Editura Teora, Bucureşti, 1999.
12. Colecţia „Gazeta matematică".
13. Colecţia „R.M.T."
14. Colecţia „Gazeta matematică", Iaşi.
15. Colecţia „Recreaţii matematice", Iaşi

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

NUMERE RAȚIONALE 5

NUMERE REALE 27

CALCUL ALGEBRIC 42

ECUAȚII. SISTEME DE ECUAȚII 59

TRIUNGHIUL 82

PATRULATERE 90

ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR 116

RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC 142

ARII 167

CERCUL 184

Scanned with OKEN Scanner